Derive im Physikunterricht

Hildegard Urban-Woldron

Obwohl das Aufstellen und Lösen von Differentialgleichungen eine der wichtigsten Methoden der Physik ist, kann diese Methode in der Schule kaum genutzt werden und ist auch in den Physikbüchern für die Schule häufig nur im Kleingedruckten oder als Anmerkung für besonders Interessierte zu finden. Schüler sind bei einer Reihe von Problemen zwar in der Lage, die zugehörige Differentialgleichung aufzustellen, doch um die Lösung zu bestimmen, fehlen ihnen ausreichende mathematische Kenntnisse. Auch wenn man die Lösung vorgibt, sind die Schülerinnen und Schüler häufig nicht in der Lage, diese algebraisch handzuhaben und zu interpretieren. Durch die Einführung von Mathematikprogrammen in der Schule, die nicht nur die Lösung einer Differentialgleichung zur Verfügung stellen, sondern mit denen auch die Möglichkeit besteht, diese Lösungen graphisch zu veranschaulichen und Parameterstudien durchzuführen, haben wir als Physiklehrer zum ersten Mal die Chance, Differentialgleichungen im Physikunterricht zu behandeln.

Als Beispiel soll über den Einsatz des Programmes DERIVE bei der Behandlung elektromagnetischer Schwingungen zur Lösung der Differentialgleichungen und deren Interpretation berichtet werden. Dazu wurden drei Unterrichtsstunden in einer 8. Klasse Realgymnasium verwendet.

1. Der elektrische Schwingkreis

Die Abbildung 1 zeigt eine Schaltung zur Erzeugung elektromagnetischer Schwingungen. Der Kondensator wird in Schalterstellung 1 über einen Widerstand $R1$ aufgeladen. Danach verbinden wir ihn über die Schalterstellung 2 mit einer Spule hoher Induktivität. Am Strommesser für *I(t)* beobachten wir, daß der Zeiger um seine Ruhelage schwingt: Es fließt ein Wechselstrom abnehmender Amplitude.

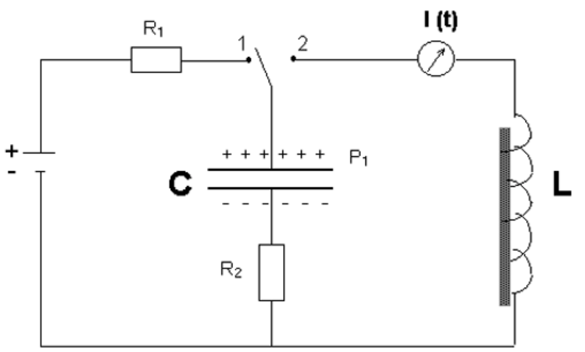

Abb. 1: Schaltung zur Erzeugung elektromagnetischer Schwingungen

Aus dem Wechselstrom schließen wir auf eine Schwingung der elektrischen Ladung Q. Daher bekommen die Platten des Kondensators periodisch wechselnde Ladungen und damit schwankt auch die Spannung am Kondensator periodisch, wie man mit Hilfe eines Spannungsmessers leicht überprüfen kann.

Dr. Hildegard Urban-Woldron, Gymnasium des Sacré Coeur,
3021 Preßbaum, Klostergasse 12

Das System aus Kondensator und Spule ist also schwingungsfähig, es heißt *elektrischer Schwingkreis*. Der Vorgang heißt *elektromagnetische Schwingung*.

Dem schwingungsfähigen System muß zunächst Energie zugeführt werden. Dies geschieht hier durch Aufladen des Kondensators. Vor dem Schließen des Kreises trägt die Platte P_1 die Ladung $+Q_m$. Die elektrische Feldenergie des Kondensators beträgt

$$W_{el} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C} \cdot Q_m^2 = \frac{1}{2} C U_m^2$$

Nach dem Schließen des Kreises beginnt sich der Kondensator zu entladen, und die Stromstärke steigt bis zum Maximalwert I_m. Die Spule besitzt dann die magnetische Feldenergie

$$W_{mag} = \frac{1}{2} L I_m^2 = \frac{1}{2} L \left(\frac{dQ}{dt}\right)^2$$

Der Strom fließt nach der Entladung des Kondensators weiter; denn würde er aufhören, wäre auch die Energie verschwunden. Der Kondensator wird also umgekehrt aufgeladen, wodurch die Feldenergie wieder auf ihn übergeht. Durch die stets im Schwingkreis vorhandenen Ohmschen Widerstände lassen sich Energieverluste nicht vermeiden, es entsteht eine *gedämpfte Schwingung*. (Wenn wir den Widerstand R vergrößern, nimmt die Amplitude rascher ab).

2. Differentialgleichungen der elektromagnetischen Schwingung

2. 1. Die ungedämpfte elektromagnetische Schwingung

Wir setzen voraus, daß die Summe der elektromagnetischen Feldenergien konstant ist:

$$\frac{1}{2} L \left(\frac{d}{dt} Q(t)\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{C} Q(t)^2 = \text{konstant}$$

Da sich die Energien zeitlich ändern, leiten wir beide Seiten der Gleichung nach der Zeit t ab:

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q \frac{dQ}{dt} = 0$$

Daraus folgt:

$$\frac{dQ}{dt} \left(L \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{1}{C} Q \right) = 0$$

Diese Differentialgleichung ist für alle t erfüllt, wenn gilt

$$L \frac{d^2}{dt^2} Q(t) = -\frac{1}{C} Q(t) . \tag{1}$$

2. 2. Die gedämpfte elektromagnetische Schwingung

Wir fassen den Schwingkreis in Abb. 1 als Stromkreis mit den beiden Quellen Kondensator und Spule auf. Damit ist die Stromstärke im Kreis durch den Widerstand R und die Summe der beiden Spannungen gegeben. Es gilt:

$$I(t) = \frac{1}{R}U(t) = \frac{1}{R}(U_c(t) + U_{ind}(t)), \text{ also}$$

$$I(t) = \frac{1}{R}\left(-\frac{1}{C}Q(t) - L\frac{dI}{dt}\right)$$

Wenn wir $I(t)$ durch $\frac{dQ}{dt}$ und $\frac{dI}{dt}$ durch $\frac{d^2Q}{dt}$ ersetzen und anschließend noch umformen, erhalten wir daraus die Differentialgleichung der *gedämpften elektromagnetischen Schwingung*:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) = 0 \qquad (2)$$

Darin bedeutet der mittlere Term die Teilspannung am Widerstand R. Dieser gegenüber der Differentialgleichung (1) zusätzliche Term beschreibt die Dämpfung, da im Widerstand R dem Schwingungsvorgang ein Teil der Energie entzogen wird.

2. 3. Erzwungene Schwingungen

Ein elektrischer Oszillator mit der Eigenfrequenz f_0 wird durch einen Sinusgenerator variabler Frequenz f_z zu erzwungenen Schwingungen erregt. Die Stromstärke $I(t)$ ist also jetzt durch die Spannungssumme dreier Quellen bestimmt. Zu Spule und Kondensator als Quelle tritt noch die Quelle für die Zwangsspannung $U_z(t)$ hinzu, so daß wir erhalten:

$$I(t) = \frac{U_z(t) + U_C(t) + U_{ind}(t)}{R}, \text{ oder mit } I(t) = \frac{dQ}{dt} \text{ und}$$

Auflösen nach $U_z(t)$:

$$\frac{1}{C}Q(t) + R\frac{dQ}{dt} + L\frac{d^2Q}{dt^2} = U_z(t) \qquad (3)$$

3. Die DERIVE-Funktion DSOLVE2

In der Hilfsdatei ODE2.MTH stellt DERIVE die Funktion DSOLVE2 zur Lösung linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen 2. Ordnung y" + p(x)y' + q(x)y = r(x) zur Verfügung. Bei den angegebenen Schwingungsgleichungen (1) bis (3) sind die Koeffizienten p und q konstant, so daß man stets eine Lösung erhält. Der Aufruf von DSOLVE2(0,1/(LC),0,t) liefert die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung (1), die aber noch Konstanten enthält, die für spezielle Lösungen bestimmt werden müssen. Daher ist in der Schule die Funktion DSOLVE_IV(p,q,r,x,x_0,y_0,v_0) besser geeignet; sie liefert sofort die Lösung für ein bestimmtes Anfangswertproblem (IV...Initial Value).

Wählt man für ein ungedämpftes System entsprechend Gleichung (1) die Anfangswerte $Q(0) = Q_m$ und $\frac{dQ}{dt}(0) = 0$, so liefert der Funktonsaufruf DSOLVE2_IV(0,1/(LC),0,t,0,Q_m,0), wenn L und C als positiv und t als nicht negativ definiert werden, das Ergebnis $Q(t) = Q_m \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)$. Für eine gedämpfte Schwingung entsprechend der Gleichung (2) erhält man mit DSOLVE2_IV(R/L,1/(LC),0,t,0,Q_m,0) periodische Lösungen mit trigonometrischen Funktionen, wenn man die Definitionsbereiche der Parameter R, L und C so wählt, daß $4C - LR^2 > 0$ ist.

Sollen erzwungene Schwingungen untersucht werden, so muß man $r(x)$ entsprechend wählen. Der Funktionsaufruf lautet dann DSOLVE2_IV(R/L,(1/LC),U_zSIN(2πft),t,0,0,0), wobei U_zSIN(2πft) die von außen aufgezwungene Wechselspannung mit der Frequenz f darstellt. Es sind aber auch andere Anregungsterme wählbar.

4. Einsatz von DERIVE im Physikunterricht

Die Differentialgleichungen der elektromagnetischen Schwingung werden im Unterricht hergeleitet. Jetzt müßte den Schülern die Funktion DSOLVE2_IV erklärt werden, damit sie nach Bestimmung der Parameter p, q, r, x, x_0, y_0 und v_0 diese richtig einsetzen können. Da aber bei diesem Vorgehen einige Erläuterungen zur Lösung von Anfangswertproblemen erforderlich wären, wurde anders vorgegangen: Der Datei ODE2.MTH wurden drei weitere Funktionen Q1, Q2 und Q3 als Black-Boxes hinzugefügt

Q1(t,L,C,Q_m) := DSOLVE2_IV(0,1/(LC),0,t,0,Q_m,0)

Q2(t,L,C,R, Q_m) := DSOLVE2_IV(R/L,1/(LC),0,t,0,Q_m,0) und

Q3(t,L,C,R,U_z,f,Q_m) := DSOLVE2_IV((R/L,(1/LC),U_1SIN(2πft), t,0,0,0),

so daß die Schülerinnen und Schüler beim Aufruf der einzelnen Funktionen nur mehr die Parameter nach eigenen Vorstellungen eingeben mußten. Wenn diese Datei als UTILITY-FILE geladen wird, erscheinen die zahlreichen Funktionen nicht auf dem Bildschirm, sondern stehen nur bei Aufruf zur Verfügung.

a) Der ungedämpfte elektromagnetische Schwingkreis

Mit dem Aufruf von "$Q_1(t)$=" erhalten die Schüler zunächst die Lösung $Q_m \cdot \cos(t/\sqrt{LC})$

Daraus können sie unmittelbar ablesen:

- Die Amplitude der Ladungsschwingung wird durch eine Cosinusfunktion beschrieben.
- Die Kreisfrequenz bzw. die Periodendauer einer elektromagnetischen Schwingung ist gegeben durch: $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ und $T = 2\pi\sqrt{LC}$ (Thomsonsche Schwingungsgleichung).
- Eine weitere interessante Anwendung ist die Überprüfung des Energieerhaltungssatzes, die algebraisch oder mit Hilfe graphischer Darstellungen erfolgen kann: Aus

  $$W_{el} = \frac{1}{2C}Q_m^2 = \frac{1}{2}CU_m^2 \quad \text{und} \quad W_{mag} = \frac{1}{2}LI_m^2 = \frac{1}{2}L\left(\frac{dQ}{dt}\right)^2$$

  erhalten wir durch Addition den konstanten Term $Q_m^2/(2C)$. Die beiden Energien sowie auch ihre Summe können ebenso graphisch dargestellt werden. (Abb. 2).

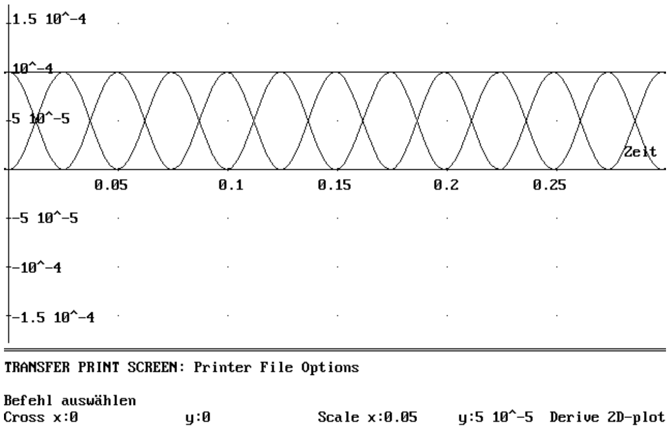

Abb. 2: Elektrische, magnetische und Gesamtenergie eines ungedämpften Schwingkreises

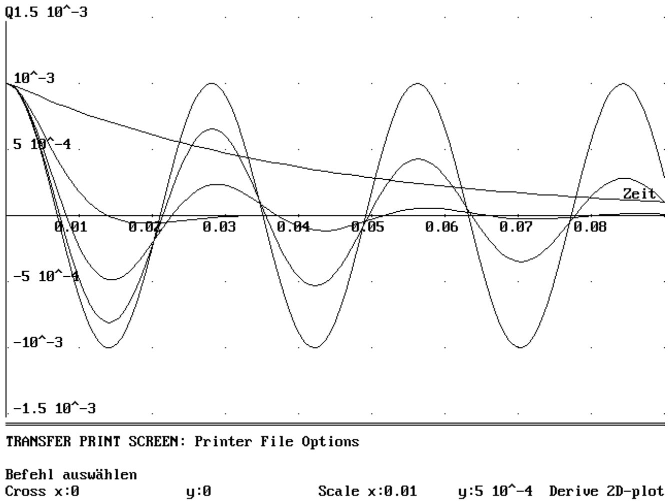

Abb. 3: Gedämpfte Schwingungen mit verschiedenen dämpfenden Widerständen (0, 6, 20, 60, 400 Ω)

b) Der gedämpfte elektromagnetische Schwingkreis

Für die hier vorgestellten Simulationen wurde folgendes Szenario gewählt:

- Für die Konstanten wurden folgende Werte gewählt: R = 0, 6, 20, 60 und 400 Ω, L = 0,2 H und C = 100 µF.
- Zum Zeitpunkt 0 s soll die Stromstärke I gleich 0 A sein. Der Kondensator sei auf 10 V aufgeladen; der Anfangswert für Q ist also 0,001 C.

Die Schüler sollten nun die Zeitkurven für die Ladung am Kondensator ausgeben und diese Diagramme unter Berücksichtigung folgender Fragestellungen auswerten: (Abb. 3)

- Finde heraus, wie der dämpfende Widerstand das Schwingungsverhalten des Kreises beeinflußt.
- Beschreibe den zeitlichen Verlauf der Kondensatorladung beim Verändern des Widerstandes in Worten.
- Untersuche, ob sich bei der gedämpften Schwingung die Schwingungsdauer merklich ändert, wenn der Dämpfungswiderstand R verändert wird.
- Untersuche die Phasenbeziehung zwischen der Spannung am Kondensator und der Stromstärke.
- Untersuche, ob die Kondensatorladung bei großem Dämpfungswiderstand zumindest näherungsweise exponentiell abnimmt.
- Wie verändert sich die Schwingungsdauer beim Verdoppeln, Vervierfachen,... der Eigeninduktivität L oder der Kapazität C? Untersuche die Abhängigkeit in einer systematischen Simulationsreihe.
- Überprüfung mit dem Realexperiment: Wähle Spulen, verschiedene Kondensatoren und einen Drehwiderstand aus und bestimme durch Messungen die Eigeninduktivitäten, Kapazitäten und Widerstandswerte und baue aus diesen Schaltelementen einen Schwingkreis auf. Mit dem Zweikanaloszillographen kannst Du die zur momentanen Kondensatorladung proportionale Spannung am Kondensator sowie den zur momentanen Stromstärke proportionalen Spannungsabfall am Widerstand in Zeit- und Phasendiagrammen darstellen. Überprüfe diese experimentell ermittelten Werte in einer Simulation.

c) Die erzwungene Schwingung

Einem elektromagnetischen Schwingkreis mit der Eigenfrequenz f_0 und dem dämpfenden Widerstand R wird von außen eine sinusförmige Wechselspannung $U_z(t)$ mit der Frequenz f aufgezwungen. Der Vorgang wird durch die Differentialgleichung (3) beschrieben. Im Vordergrund steht die Frage nach dem Verhalten des Schwingkreises, wenn f gleich, kleiner oder größer als f_0 ist. Hier kann der Einschwingvorgang beobachtet werden, der im Realexperiment nicht so einfach zugänglich ist wie der eingeschwungene Zustand.

Die Schüler erhielten folgende Aufgabenstellung:

- Führe die Simulation mit den Parameterwerten R = 50 Ω, C = 4 µF, L = 0,633 H, $U_{z,0}$ = 2 V und den Startwerten $Q(0)$ = 0 As und $I(0)$ = 0 A durch. Nach der Thomsonschen Formel hat der Schwingkreis für diese Werte dann die Eigenfrequenz f_0 = 100 Hz.
- Untersuche das Schwingungsverhalten auch für die Fälle, in denen die Zwangsfrequenz gleich, kleiner oder größer als f_0 ist.

5. Zusammenfassung

Diese Beispiele zeigen, daß es durch den Einsatz des Programmes DERIVE möglich war, im Physikunterricht der 8. Klasse Differentialgleichungen zu behandeln, ohne die Schüler zu überfordern. Dabei wurden die Schüler nicht mit der Theorie der Differentialgleichungen belastet, da vom Lehrer für jede der drei Unterrichtseinheiten die entsprechende Funktion definiert wurde, die dann Lösungen für spezielle Aufgabenstellungen lieferte. Die Aufgabe der Schüler bestand darin, durch Wahl der Parameter Zusammenhänge und Abhängigkeiten herauszufinden, wobei die Ergebnisse meistens direkt aus den graphischen Darstellungen abgelesen werden konnten. Dadurch ist es gelungen, den Schülern tiefere Einblicke in das Thema elektromagnetische Schwingungen zu liefern, denn sie konnten durch geeignete Parameterstudien selbst das Verhalten eines elektrischen Schwingkreises nachbilden und damit auch "begreifen" und verstehen.