Interessanter Fall gekoppelter Schwingungen

Leopold Stadler

Einer der eindruckvollsten Schauversuche zur Schwingungslehre zeigt die gekoppelten Dehnungs- und Drehschwingungen einer langen Schraubenfeder, wie sie der englische Physiker Lionel Robert Wilberforce (1861-1944) im Jahr 1894 erstmals beschrieben hat. Dieser Versuch ist leicht auszuführen, der Vorgang wegen der geringen Dämpfung lange Zeit zu beobachten und das Gerät ist im Lehrmittelhandel erhältlich.

Weniger bekannt ist ein ähnlicher Versuch, bei welchem eine erstaunliche 1:2 Kopplung stattfindet. Ich habe ihn bei meinem Experimentalvortrag im Rahmen der Fortbildungswoche 2008 vorgeführt. Da er auf großes Interesse stieß und keine besonderen Hilfsmittel erfordert, möchte ich diesen lehrreichen Schauversuch einem größeren Kreis bekannt machen.

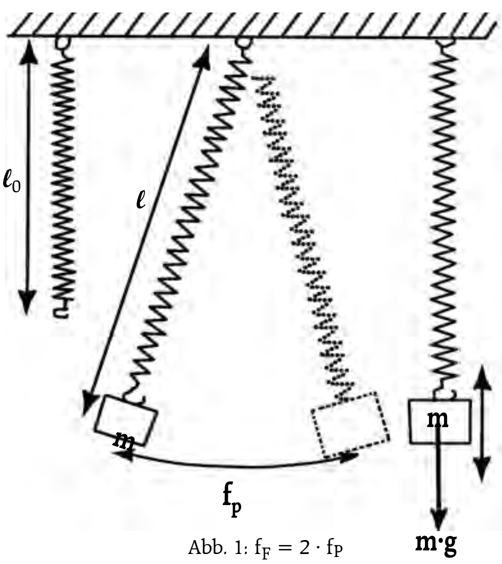


Abb. 1: $f_F = 2 \cdot f_P$

Auch hier handelt es sich um zweierlei Schwingungen einer belasteten Schraubenfeder, deren Masse gegenüber jener des Pendelkörpers vernachlässigbar ist. Neben Querschwingungen werden Kontraktionsschwingungen beobachtet, deren Frequenzen sich wie 1:2 verhalten: Einmal schaukelt das Massestück an der Schraubenfeder in erster Näherung wie ein mathematisches Pendel, darauf erfolgt die übliche vertikale Federschwingung im Schwerefeld der Erde.

Bevor ich einige experimentier-technische Einzelheiten verrate (insbesondere zur Frage, wie die genaue Frequenzabstimmung hergestellt werden kann), wollen wir überlegen, wie diese Kopplung zustande kommt.

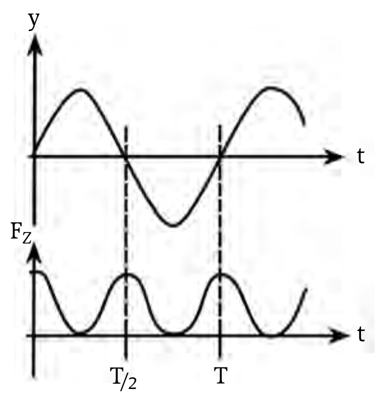
OStR Mag. Leopold Stadler hat an der HTL Ottakring Wien Physik unterrichtet und demonstriert Experimentierkunst im Rahmen der Fortbildungswoche

Versuchs-Ablauf

Der Pendelkörper wird möglichst genau vertikal nach unten gezogen und dann losgelassen. Zur harmonischen Vertikalschwingung gesellt sich im Lauf mehrerer Perioden ein wachsender Quer-Ausschlag, bis endlich die Längsschwingung völlig verschwunden ist und eine reine Pendelbewegung statt findet. Alsbald läuft der Verwandlungsprozess retour und das Koppel-Spiel beginnt von Neuem. Nebenbei ist in einer Übergangsphase schön zu beobachten, wie der Pendelkörper – im Sinne von Lissajous – eine liegende Acht durchläuft.

Zum Verständnis

Leicht einzusehen ist die Rückverwandlung von der Pendelbewegung zur linearen Federschwingung: Bei jedem Hin- und Her-Schwingen wird die Feder beim Durchgang durch die Vertikale maximal gedehnt, mit der doppelten Frequenz der Pendelschwingung wirkt die Zentralkraft periodisch auf die Feder ein, wodurch die Längsschwingung mit ihrer Eigenfrequenz angefacht wird.



$$y = A \cdot \sin \omega t$$

$$F_Z = \frac{m\,v^2}{L} = \frac{m}{L} A^2 \omega^2 \cos^2 \omega t \sim$$

$$\sim \cos^2 \omega t = \frac{1+\cos^2 \omega t}{2}$$

Welcher Mechanismus stört jedoch die vertikale Federschwingung? Keine Federaufhängung ist ideal symmetrisch, so dass bei jeder Veränderung der Federspannung eine kleine Querkraft in der Aufhängung auftritt. Fertigungstechnisch ist es geradezu unmöglich, eine Feder so herzustellen, dass diese seitliche Kraft völlig vermieden wird.

Zur Ausführung des Versuchs

Wir wählen Feder und Masse des Pendelkörpers so, dass die Größe der Anordnung, bzw. die Schwingungsdauer gute Beobachtung zulassen. Man kann eine Feder aus dem Lehrmittelangebot für Schwingungsversuche verwenden; als Federkonstante halte ich einige 10 N/m für günstig. Der

Pendelkörper sollte fest mit dem Ende der Feder verbunden sein (angeklemmt oder mittels Klebeband fixiert) und kann z.B. aus einem Stapel von Scheiben Masse-Scheiben (zu 50g/20g/10g) bestehen.

Wie groß die Masse bei gegebener Feder etwa sein sollte, können wir berechnen und damit nervendes Herumprobieren vermeiden. Dies werde ich später angeben und vorher einige Kunstgriffe für die Feinabstimmung der Bedingung $T_P = 2\,T_F$ angeben.

Da die Federkonstante k gar nicht und die Masse m nur schlecht variiert werden können, lassen wir die Federschwingungs-Frequenz unbehelligt und konzentrieren uns auf die Pendellänge L. Diese kann dadurch fein reguliert werden, indem zwischen dem oberen Ende der Feder und der Drehachse ein Stück Schnur der Länge a eingeschaltet wird. Dadurch erreichen wir:

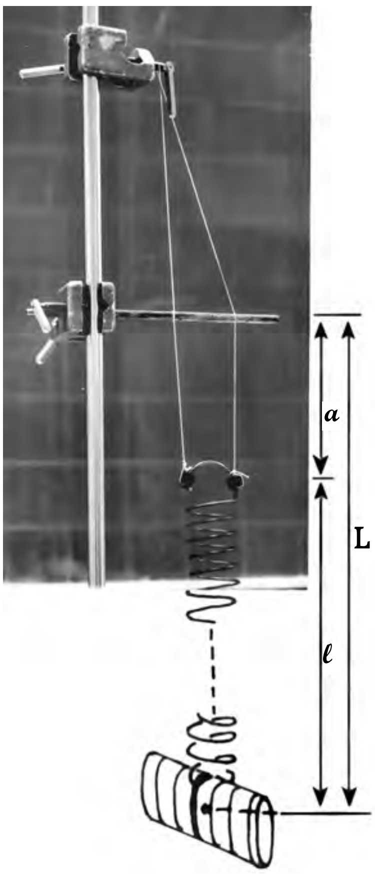


Abb. 3

1) Die bifilare Aufhängung unterdrückt Querschwingungen senkrecht zur Pendelebene.

2) Beide Fäden sind jeweils einmal um einen Stift (Ø 4 mm) geschlungen, während das Gewicht der Anordnung vom Stativ getragen wird,

3) Wir stoppen die Schwingungsdauer des „Pendels" bei kleiner Amplitude, nachdem wir T_F über eine größere Anzahl von Perioden genau ermittelt haben (Hand-Stopuhr)

4) Die Angleichung von T_P auf das Doppelte der Frequenz T_F kann jetzt leicht und genau durch Verschieben des Stifts, also durch Korrigieren der Pendellänge erfolgen.

Zuletzt zur Berechnung eines geeigneten Betrages der Masse m.

$$\ell = \ell_0 + \Delta\ell = \ell_0 + \frac{F}{k} = \ell_0 + \frac{m\cdot g}{k}$$

$$L = a + \ell = a + \ell_0 + \frac{m\cdot g}{k}$$

gefordert ist

$$2 \cdot f_P = f_F \text{ bzw. } 2 \cdot T_F = T_P$$

$$2 \cdot \left[2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \right] = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \,\Big|^2 \qquad 4 : \frac{m}{k} = \frac{L}{g}$$

Es bezeichnen ℓ_0 die Länge der unbelasteten Feder, a die Länge der Schnur und k die Federkonstante. Dann gilt für die belastete Feder

$$4\,mg = k \cdot \left(a + \ell_0 + \frac{mg}{k}\right)$$

$$3\,mg = k \cdot (a + \ell_0)$$

$$m = \frac{k \cdot (a + \ell_0)}{3g}$$

Es wurde eine Feder des „Paar gleicher Federn" aus Bronze-Draht der Fa. Leybold mit $k = 32$ N/m und ℓ_0 ca. 29 cm verwendet. Mit $a = 14$ cm erhält man

$$m = \frac{32\,N \cdot (0{,}29+0{,}14)m}{m \quad 3 \cdot 9{,}81 m/s^2} = \frac{32 \cdot 0{,}43}{29{,}43}\,kg = 0{,}468\,kg$$

tatsächlich waren 470 Gramm befestigt.

Gutes Gelingen wünscht der Autor

Material

- Schraubenfeder (k ... einige 10 N/m)
- diverse Masse-Scheiben
- Stoppuhr
- schwerer Stativfuß
- Stativstange 1 m
- Kreuzmuffen
- Metallstift (ca. 4 mm Durchmesser),
- Schnur

Literatur

[1] Krönke Helmut, Mechanische Schwingungen und Schall, S. 18 ff. Hildesheim: A. Lax 1962 (vergriffen)

[2] Lehrmittelkataloge diverser Firmen (Spiralfedern, Wilberforce-Pendel, Massescheiben)

[3] Schlichting H.-J. und Ucke C., Das „Metapendel" oder: "Eine sich selbst antreibende Schaukel", Physik in unserer Zeit 26 (1995), 41-42.
Online: *http://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/fachbereich_physik/didaktik_physik/publikationen/metapendel_schaukel.pdf*