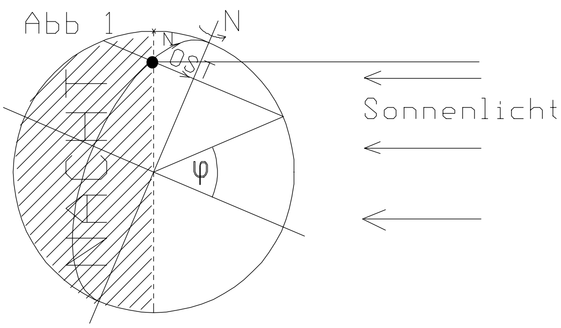
Wo geht die Sonne auf

Fritz Wernig

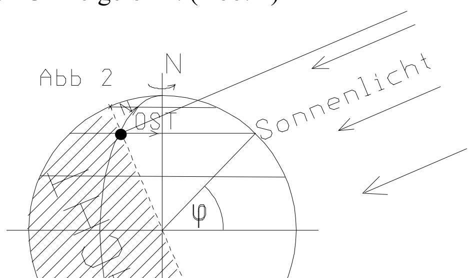
Sonnenaufgang am Tag der Sommersonnenwende

Wo geht die Sonne am Tag der Sommersonnenwende in einem beliebigen Ort der nördlichen Hemisphäre auf? Welche Winkel schließen die aufgehenden Sonnenstrahlen mit der Ostrichtung ein? Wie Abb. 1 zeigt, geht die Sonne nicht im Osten, sondern zwischen Ost und Nord auf. Der Winkel α hängt von der geografischen Breite φ des Ortes ab. Jedenfalls ist α für einen Ort am Äquator 23,5°, für einen Ort am nördl. Polarkreis 90° (Hier dauert die Nacht nur ein Augenblick, Sonnenauf- und -untergang fallen zusammen, die Sonne steht im Norden.)

Denken wir uns Tangenten an die Breitenkreise gelegt. Diese Tangenten geben dem Beobachter die O-W-Richtung an. Es gilt also, den Winkel zwischen diesen Tangenten und dem einfallenden Lichtstrahl zu berechnen.



Zur leichteren Berechnung des Winkels α drehen wir die Abb. 1 um 23,5 Grad (das ist genau die Neigung der Erdachse) gegen den Uhrzeigersinn. (Abb. 2)

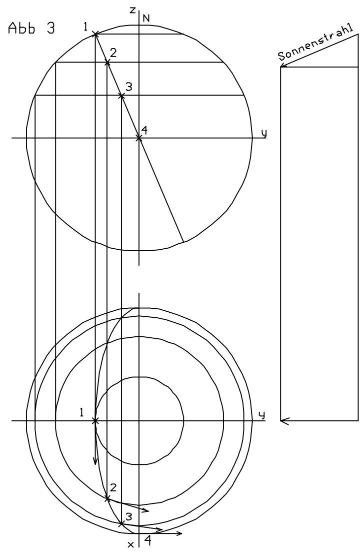


Dadurch ändert sich an der Größe des zu berechnenden Winkels α nichts.

Nun führen wir ein Koordinatensystem ein, bei dem die z-Achse senkrecht nach oben, die y-Achse nach rechts und die x-Achse normal auf die Zeichenebene (unser Blatt) steht. Koordinatenursprung und Erdmittelpunkt fallen zusammen.

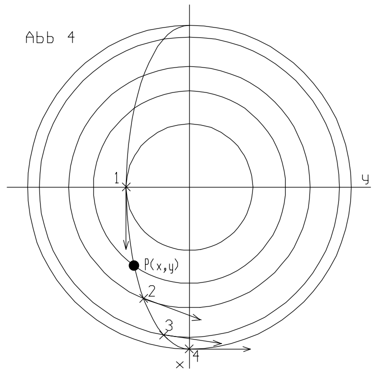
Betrachten wir die Erde nun von oben, aus der z-Richtung.

Wir projizieren die Breitenkreise und den Kreis der Tag-Nachtgrenze in die Ebene des Äquators (xy-Ebene). Es entstehen konzentrische Kreise (d.h. Kreise mit gemeinsamen Mittelpunkt) und eine Ellipse. Große Halbachse = Erdradius R, kl. Halbachse = Radius des nördl. Polarkreises = $R\cos 66{,}5° = R\sin 23{,}5°$)



Die Breitenkreise, ihre Tangenten und somit auch deren Richtungsvektoren liegen in Ebenen parallel zur Äquatorebene. Sie erscheinen also in Abb. 3 unten in wahrer Größe.

Wir wollen nun den Winkel α zwischen dem Richtungsvektor und dem einfallenden Sonnenstrahl für einen (beliebigen) Punkt *P(x,y)* der Tag-Nachtgrenze berechnen. (Abb. 4)



Die Kreisgleichung des Breitenkreises für diesen Punkt lautet:

$x^2 + y^2 = r^2$, wobei $r = R\cos\varphi$ ist. (Siehe Abb. 1)

Die Gleichung der Ellipse in 1. Hauptlage lautet:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ oder } x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2,$$

wobei $a = R$ und $b = R\cos 66{,}5° = R\sin 23{,}5°$ (für den nördl. Polarkreis ist $\varphi = 66{,}5°$)

Schneidet man die beiden Kurven, so muß man z.B. das y^2 der Ellipsengleichung durch jenes der Kreisgleichung ersetzen.

Also:

$x^2b^2 + (r^2 - x^2)a^2 = a^2b^2$ oder, wenn man a, b und r ersetzt:

$$x^2R^2\sin 23{,}5° + (R^2\cos^2\varphi - x^2)R^2 = R^2R^2\sin^2 23{,}5°$$

Dividiert man durch R^2, so bleibt:

$$x^2\sin 23{,}5° + R^2\cos^2\varphi - x^2 = R^2\sin^2 23{,}5°$$

Daraus ist nun x zu berechnen:

$$x^2(\sin^2 23{,}5° - 1) = R^2(\sin^2 23{,}5° - \cos^2\varphi)$$

Mag. Fritz Wernig, Am Birkengrund 73, 9073 Viktring.
e-mail: wefritz@carinthia.com

Da für jeden beliebigen Winkel δ die Gleichung
$\sin^2\delta + \cos^2\delta = 1$ gilt, erhalten wir:

$$-x^2\cos^2 23{,}5° = R^2(\sin^2 23{,}5° - \cos^2\varphi)$$

Dividieren wir nun die Gleichung durch $-\cos^2 23{,}5°$, und ziehen anschließend die Wurzel, so erhalten wir:

$$x = \pm R\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2 23{,}5°} - \tan^2 23{,}5°} \qquad (1)$$

Die Lage unseres Punktes P in Abb 4 zeigt, dass die x-Koordinate positiv ist.

Nun berechnen wir die Steigung der Tangente (an den Breitenkreis) im Punkt P.
Wegen $x^2 + y^2 = r^2$ gilt:

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

Nach Abb. 4 ist y negativ. Die erste Ableitung, also die Steigung k ist daher:

$$y' = k = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Setzen wir in diese Formel die oben berechnete x-Koordinate (1) ein, erhalten wir für

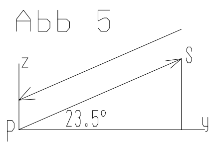
$$k = R\sqrt{\frac{\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2 23{,}5°} - \tan^2 23{,}5°}{R^2\cos^2\varphi + R^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2 23{,}5°} - \tan^2 23{,}5°\right)}} \qquad (2)$$

Das gibt vereinfacht:

$$k = \frac{\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2 23{,}5°}}{\sin\varphi\sin 23{,}5°}$$

Der Richtungsvektor der Tangente für unseren beliebig gewählten Punkt P bei Sonnenaufgang liegt in der xy-Ebene und lautet nun: $\mathbf{t} = (1, k, 0)$.

Der Vektor vom Punkt P zur Sonne (entgegen dem einfallenden Sonnenstrahl) hat die Koordinaten: $\mathbf{PS} = (0, \cos 23{,}5°, \sin 23{,}5°)$, wie Abb. 5 zeigt.



Der Winkel, den diese beiden Vektoren einschließen, unser gesuchter Winkel α, läßt sich aus (3) berechnen:

$$\cos\alpha = \vec{t}\,\overrightarrow{PS}/\left|\vec{t}\,\overrightarrow{PS}\right| = k\cos 23{,}5°/\sqrt{1 + k^2} \qquad (3)$$

Nun kann zu jeder geographischen Breite φ die Steigung k, und mit diesem k der Winkel α berechnet werden.

Für Klagenfurt ergibt sich der Sonnenaufgang in Richtung = O 35° N.

In der folgenden Tabelle sind für einige ausgewählte φ die zugehörigen Winkel α angegeben.

φ°	0	1	10	20	30	40	46	50	60	66	66. 5
α°	23,5	23,504	23,9	25,1	27,4	31,4	35	38,3	52,9	78,6	90

Damit wäre unsere eingangs gestellte Frage nach der Richtung des Sonnenaufgangs, beantwortet.

Der längste Tag im Jahr

Der untere Teil in Abb. 3 (Ansicht der Erde von oben) ermöglicht uns nun noch, die Tageslänge für jeden beliebigen Ort am Tag der Sommersonnenwende zu berechnen. Es ist dies der längste Tag des Jahres an diesem Ort.

Die Ellipse der Tag-Nachtgrenze teilt die Breitenkreise in zwei ungleich große Teile. Der kleinere Teil zeigt uns den Weg eines Ortes (z.B. Punkt 2) in der Nacht, während der größere Teil am Tag durchlaufen wird. Wielange befindet sich nun ein Ort auf der Tagseite?

Die Länge des Kreisumfanges wird sich zur Tagesbogenlänge so verhalten wie 24 Stunden zur Länge des Tages. Statt des Kreisumfanges bzw. der Tagesbogenlänge können wir auch die zugehörigen Zentriwinkel verwenden. Wir wollen aus dieser Beziehung die Tageslänge berechnen.

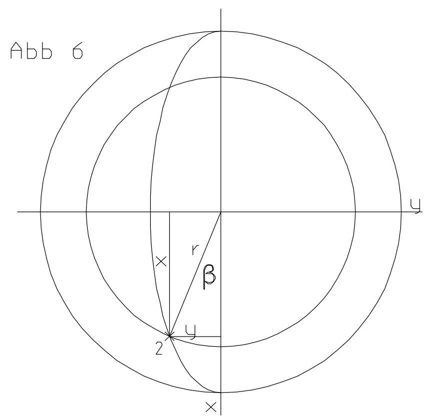
Die x-Koordinate des Punktes 2 haben wir bereits berechnet (siehe (1)).

Die zugehörige y-Koordinate ergibt sich, indem man den x-Wert in die Kreisgleichung

$x^2 + y^2 = r^2 = R^2\cos^2\varphi$ einsetzt.

Daraus ergibt sich für y nach etwas längerer Rechnung der Ausdruck:

$$y = R\tan 23{,}5°\sin\varphi$$



Berechnen wir nun aus der Abb. 6 den $\sin\beta$.

$$\sin\beta = \frac{y}{r} = \frac{R\tan 23{,}5°\sin\varphi}{R\cos\varphi} = \tan 23{,}5°\tan\varphi$$

Darin ist φ wie immer die geographische Breite des betrachteten Ortes.

Für die Stadt Klagenfurt (φ≅46°) ergibt sich α zu 26,76°.
$2\alpha + 180 = 233{,}52°$.
Nun gilt: 360°/233,52° = 24h/Tageslänge.

Die gesuchte Tageslänge ergibt sich daraus für Klagenfurt zu 15,57 Stunden.

Entsprechend kann die Berechnung für jeden beliebigen Punkt der nördlichen Hemisphäre berechnet werden, wenn man nur seine geogr. Breite φ kennt.