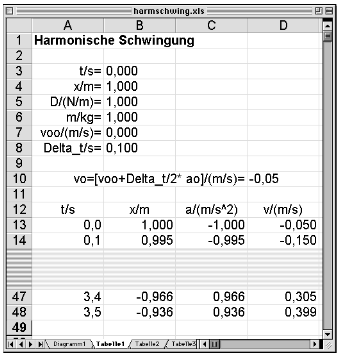
Warum nicht mal numerisch?

Computergestützte Modellbildung erschließt interessante Phänomene für den Physikunterricht

Horst Schecker

1. Werkzeuge für numerische Modellierungen

Computergestützte Modellbildung im Physikunterricht ist ein zartes, sich langsam entwickelndes Pflänzchen. Seit dem Aufkommen erschwinglicher Personalcomputer in den achtziger Jahren gibt es eine begrenzte Gruppe von Kolleginnen und Kollegen, die den Rechner als Werkzeug für numerische Simulationen einsetzen. Zunächst wurden einfache Simulationsprogramme mit Programmiersprachen wie BASIC entworfen. Dann wurde entdeckt, dass man mit Tabellenkalkulationsprogrammen nicht nur Messdaten auswerten, sondern auch recht übersichtlich iterative Berechnungen durchführen kann. Dies führte zu "Spreadsheet Physics" (z.B. Misner 1991. s. Beispiel in Abb. 1). Ein weiterer Schritt waren spezielle Entwicklungsumgebungen für numerische Simulationen mit einer gegenüber Programmiersprachen vereinfachten Syntax. Bei diesen gleichungsorientierten Modellbildungssystemen (z.B. Moebius) braucht der Nutzer nur noch die wenigen physikalisch relevanten Gleichungen einzusetzen und ist von der Formulierung numerischer Lösungsverfahren und der Grafik-/Tabellenausgabe entlastet. Es kommt aber entscheidend auf die *Reihenfolge* der Modellgleichungen an.



harmschwing.xls

	A	B	C	D
1	**Harmonische Schwingung**			
2				
3	t/s=	0,000		
4	x/m=	1,000		
5	D/(N/m)=	1,000		
6	m/kg=	1,000		
7	voo/(m/s)=	0,000		
8	Delta_t/s=	0,100		
9				
10	vo=[voo+Delta_t/2* ao]/(m/s)=			-0,05
11				
12	t/s	x/m	a/(m/s^2)	v/(m/s)
13	0,0	1,000	-1,000	-0,050
14	0,1	0,995	-0,995	-0,150
47	3,4	-0,966	0,966	0,305
48	3,5	-0,936	0,936	0,399
49				

Diagramm1 Tabelle1 Tabelle2 Tabelle3

Abb. 1: Excel-Tabelle zur Berechnung der harmonischen Schwingung (nach Feynman, R. P., Leighton, R. B. & Sands, M.: The Feynman Lectures on Physics, Vol.1, 9-5).

Aus der Systemdynamik (s. dazu Ossimitz 1990) stammt eine alternative Vorgehensweise, bei der man das physikalische Modell zunächst in Form eines Begriffsnetzes grafisch formuliert (s. Abb. 2). Die verwendeten Begriffe werden als Icons auf den Bildschirm gelegt und mit Pfeilen verbunden. Die Pfeile stehen für funktionale oder iterative Beziehungen. Erst dann werden Funktionen und Konstanten eingegeben. Aus dem Begriffsnetz und den Funktionen entwickeln grafikorientierte Modellbildungssysteme (z.B. Stella und Powersim) automatisch die Simulationsgleichungen.

Dr. Horst Schecker ist Privatdozent am Institut für Didaktik der Physik der Universität Bremen, Postfach 330440, D-28334 Bremen.
e-mail: schecker@physik.uni-bremen.de
http://www.physik.uni-bremen.de/physics.education/

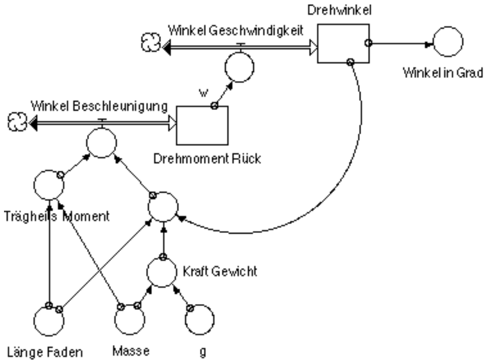


Abb. 2: Grafische Modellstruktur zur Beschreibung der Schwingung eines Fadenpendels (erstellt mit dem Modellbildungsprogramm STELLA; nach Schecker, H.: Physik modellieren. Stuttgart: Klett 1998, S. 147).

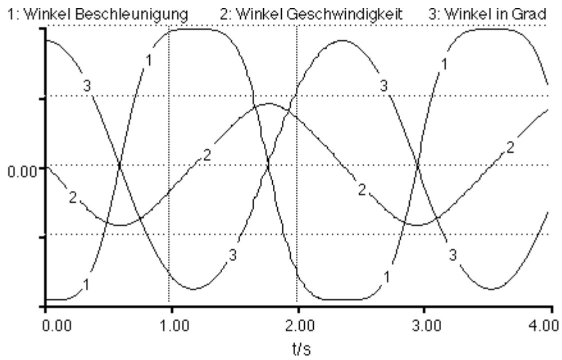


Abb. 3: Simulationsergebnis des Modells bzw. einer entsprechenden Excel-Tabelle: Schwingung eines Fadenpendels mit großer Amplitude (90 Grad) l = 1 m, m = 0,1 kg: Der Schwingungsverlauf ist nicht mehr harmonisch.

Eine Weiterentwicklung gegenüber konventionellen gleichungsorientierten Entwicklungsumgebungen sind Modellbildungsprogramme, bei denen man statt mit Iterationsgleichungen bzw. Differenzenquotienten direkt mit Differentialgleichungen arbeitet. Die Formulierung des Modells entspricht einem geschlossenen analytischen Ansatz. Intern wird jedoch weiterhin mit numerischen Verfahren gearbeitet. Die Reihenfolge, in der die Gleichungen aufgeschrieben werden, spielt aber keine Rolle mehr. Das Programm bringt sie aufgrund einer der automatischen Unterscheidung von Differentialgleichungen und Funktionen in eine zwingende Reihenfolge. Schließlich sind noch die Computeralgebrasysteme zu nennen, die sich ebenfalls für physikalische Modellierungen eignen.

2. Gleichungsorientiert oder grafikorientiert?

Allen Systemen ist gemeinsam, dass sie die mathematischen Schwierigkeiten reduzieren oder umgehen, die geschlossenen Lösungen anhaften. In einer Zeit, in der die traditionelle Zusammenarbeit zwischen den Fächern Mathematik und Physik aus organisatorischen Gründen nicht mehr möglich ist (und gleichzeitig Mathematiker nicht mehr reflektieren, dass über lange Zeit die Entwicklung ihrer Wissenschaft wesentlich durch Bedürfnisse der Physik gesteuert wurde), können Modellbildungssysteme damit Probleme abbauen, die aus mathematischen Anforderungen im Physikunterricht erwachsen.

Der Vorteil von grafik- und differenzialgleichungsorientierten Programmen liegt darin, dass der Nutzer sich vollständig auf die in das Modell eingehenden physikalischen Annahmen konzentrieren kann ohne sich mit numerischen Problemen oder der Reihenfolge von Iterationsgleichungen befassen zu müssen. Gerade für komplexere Sachverhalte erhöht sich die Übersichtlichkeit. Allerdings muss man bei grafikorientierten Programmen eine neue Symbolsprache erlernen, die für sehr viele dynamische Vorgänge in Physik, Ökonomie, Ökologie usw. anwendbar ist. Die Einarbeitung ist gerechtfertigt, wenn im Physikunterricht der Oberstufe in mehreren Halbjahren grafikorientierte Modellbildung eingesetzt wird. Es ist außerdem sehr sinnvoll, damit auch in Fächern wie Biologie (Räuber-Beute-Systeme, Öko-Systeme) oder Chemie (Reaktionskinetik) zu arbeiten. Eine umfassende Einführung in *grafikorientierte Modellbildung* mit zahlreichen Beispielen aus der Oberstufenphysik ist in Schecker (1998) erschienen.

Im vorliegenden Aufsatz arbeite ich primär mit dem Programm *Modellus*, dem aus meiner Sicht besten gleichungsorientierten Modellbildungsprogramm. Die Formulierung des Modells mit Differentialgleichungen ist, zumindest dem Lehrer, vertrauter als bei grafikorientierten Programmen, weil die Symbolsprache der Systemdynamik entfällt. Dafür gibt es auch keine Möglichkeit, die physikalischen Größen und ihre Zusammenhänge in einem Begriffsnetz zu visualisieren. Optimal wäre ein Programm, bei dem wahlweise der grafikorientierte und der gleichungsorientierte Modus eingestellt werden kann und bei dem auch eine Umwandlung in die jeweils andere Modelldarstellung automatisch erfolgt. Leider gibt es solche Modellbildungsprogramme bisher noch nicht.

3. Wer ist der "Nutzer"?

Wer ist eigentlich gemeint, wenn oben von "man" der "der Nutzer" die Rede ist? Am Beginn waren das die computerbegeisterten Lehrer, die zuhause mit großem Engagement eigene Programme schrieben und diese dann ihren Schülern begeistert vorstellten. Dann wurde an Arbeitsgemeinschaften gedacht, in denen besonders interessierte Schüler (meistens Jungen) am Nachmittag vor dem Computer brüteten. Einen wirklichen Durchbruch gibt es aber erst, wenn die Schüler im "normalen" Unterricht interaktiv am Computer physikalische Probleme bearbeiten, die aus dem Unterrichtsverlauf erwachsen und in die sonstigen experimentellen und theoretischen Arbeiten eingebunden sind. Es ist ein entscheidender Unterschied, ob Schüler lediglich bei einem fertig gelieferten Simulationsprogramm Parameter variieren und per Tastendruck Bahnkurven geliefert bekommen, oder ob sie zunächst eigenständig alle physikalischen Annahmen überlegen und eingeben und ausprobieren müssen, bevor sie in einem zweiten Schritt mit "ihrem" Programm Simulationsläufe fahren. Die Phase der Modellbildung ist für die Vertiefung und Anwendung physikalischen Wissens wichtiger als die Simulation.

4. Einstieg in numerische Verfahren

Für den Einstieg in numerische Simulationen bietet sich die Federschwingung an. Zunächst ohne Computer, aber mit Hilfe von Taschenrechnern, wird ein Rechenformular erstellt. Die wesentliche gedankliche Arbeit, nämlich die Umsetzung eines Problems in eine Tabelle, kann von allen ohne Computer mit Papier und Bleistift erledigt werden. Auch erste Rechnungen, um die Ergebnisse andeutungsweise zu prüfen, können von Hand erledigt werden. Damit ist es auch möglich, diese Arbeitstechnik in Klassenarbeiten zu verwenden. Dass die Aufgabe, Rechnungen 50-mal zu wiederholen, zunächst ohne Begeisterung aufgenommen wird, kann nicht verwundern. Groß ist dann die Überraschung über die Rechenergebnisse: Man kann einen physikalischen Vorgang eigenständig "per Hand" simulieren. Das Rechenblatt wird dann in ein Tabellenkalkulationsprogramm übertragen. Nachdem das erste Problem in einfacher Form bearbeitet wurde, ist die Verfeinerung - zunächst Einführung von Gerätekonstanten, um Rechnung und Experiment vergleichen zu können - ebenso möglich, wie die Erweiterung, beispielsweise zur Behandlung des Fadenpendels. Damit ist der erste Schritt in Richtung der Bearbeitung von Problemstellungen gemacht, die der Schulmathematik geschlossen nicht zugänglich sind. Genannt seien Einschwingvorgänge und chaotische Bewegungen.

Die tabellarische Berechnung mit Spreadsheets wie Excel ist ein guter Einstieg in numerische Herangehensweisen, wenn man später mit spezieller Modellbildungssoftware arbeitet. Die Schüler erfahren daran, wie ein solches Programm intern rechnet. Es ist eine wichtige "vertrauensbildende Maßnahme", wenn das Modellbildungsprogramm zum gleichen Ergebnis kommt wie die eigene Excel-Tabelle.

Alle Modellbildungsverfahren basieren auf numerischen mathematischen Methoden. Die Zuverlässigkeit der Resultate muss daher stets überprüft werden. Drei Methoden haben sich als sinnvoll erwiesen: Verkürzung der Zeitintervalle, um zu überprüfen, ob die Ergebnisse stabil bleiben; Untersuchung einer Erhaltungsgröße, z. B. Energie bei der harmonischen Schwingung; Vergleich mit experimentellen Resultaten. Das letztere Verfahren sollte im Physikunterricht die Hauptrolle spielen - möglichst mit eigenen experimentellen Untersuchungen, aber auch mit Daten aus der Literatur.

Für den Übergang zur Nutzung spezieller Modellbildungsprogramme bietet sich besonders die Mechanik an. Hier können - wie auch mit Tabellenkalkulation - interessante Phänomene auch quantitativ behandelt werden, die sonst aus mathematischen Gründen entfallen. Dazu zählen Fragen wie "Welches ist für einen Kugelstoßer der optimale Abstoßwinkel?" ($\alpha<45$ Grad) oder "Welche Kräfte wirken auf einen Springer während der Öffnung seines Fallschirms?". Am Beginn sollten einfache Beispiele aus der Kinematik stehen, die zur Kontrolle auch geschlossen gelöst werden. Nach unseren Erfahrungen müssen Schüler zwei bis drei einführende Modelle nachbauen, bevor sie in Gruppen eigene Modelle entwerfen können. Dabei müssen die Fragestellungen so gewählt werden, dass einerseits einfache Antworten möglich sind und diese Modelle andererseits Ansatzpunkte für Erweiterungen durch leistungsstarke Schüler bieten. Das folgende Beispiele soll dies an der Modellierung des Fallschirmspringens veranschaulichen.

5. Modellierung des Fallschirmsprungs

Das Thema Fallschirmspringen hat den Reiz der sportlichen Herausforderung und des Risikos. Nach meinen Erfahrungen sind Schüler motiviert, auch seine physikalischen Aspekte zu betrachten. Als Einstieg kann ein kurzes Video dienen oder ein Zeitungsbericht. So fand ich z.B. einen Beitrag über einen Absprung aus einem Heißluftballon aus 3000 m Höhe, in dem über eine Freifall-Phase von 44 Sekunden für 2000 Meter berichtet wird (Weser-Kurier vom 8. 3. 1998). Darauf lässt sich ein Unterrichtsgespräch aufbauen, in das Schüler eigenes Wissen zum Thema ebenso einbringen können wie Abschätzungen über Fallgeschwindigkeiten, auftretende Beschleunigungen und besonders über die Geschwindigkeit bei der Landung einbringen können.

Als physikalisches Wissen ist die Kinematik mit den Definitionen von Geschwindigkeit und Beschleunigung vorauszusetzen sowie das dritte Newtonsche Axiom über den Zusammenhang zwischen Kraft und Beschleunigung. Numerische Modellbildung eignet sich besonders für die Anwendung und Vertiefung von Wissen. Schüler können damit Begriffe und Gesetze auf realistischere und interessantere Situationen anwenden, als auf die stark idealisierten Phänomene, an denen sie eingeführt wurden.

5.1 Erste Abschätzungen

Die zulässige Landegeschwindigkeit kann man grob abschätzen, wenn man sich fragt, wie hoch eine Mauer sein darf, von der man ohne Verletzungsgefahr hinunterspringen kann. Je nach körperlicher Fitness sind zwei bis drei Meter Höhe ein realistisches Maß. Bei einer Mauer von etwa 2,5 m ergibt sich unter Berücksichtigung der Lage des Schwerpunkts des Körpers eine Fallstrecke h von ca. 3 m. Man winkelt die Beine bei der Landung etwas an, um die Kniegelenke nicht zu stark zu belasten. Fallschirmspringer rollen sich gegebenenfalls bei der Landung ab und verteilen die Aufprallverzögerung so auf einen größeren Zeitraum, so dass geringere Kräfte auftreten. Die - wie gesagt recht grobe - Abschätzung ergibt für die maximale Auftreffgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2hg} \approx 8\,\mathrm{m/s}$$

Das zu erstellende Modell sollte in seiner Vorhersage diesen Wert nicht überschreiten. Ein weiterer Maßstab, an dem die Simulation zu messen ist, sind die Angaben zur Dauer des freien Falls (2000 m in 44 s). Die mittlere Fallgeschwindigkeit liegt damit etwa bei 45 m/s. Die Reißleine wird in 1000 m Höhe gezogen.

Die folgenden Abbildungen stammen aus der Arbeit mit dem Programm Modellus. Als zentrale Gleichungen werden in das Modellfenster eingegeben:

$$\frac{dv}{dt} = a\,, \quad \frac{dh}{dt} = v\,, \quad a = \frac{F}{m}$$

Gleichungen des Typus "dy/dx = ..." werden von Modellus automatisch als Differenzialgleichungen erkannt. Damit sind die beiden wesentlichen Differentialquotienten eingeführt (ein dritter kommt später noch dazu, s.u.). Intern werden sie als Differenzenquotienten behandelt und nach dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung numerisch gelöst.

5.2 Welche Kräfte wirken?

Die drei bisherigen Modellgleichungen bilden den Kern praktisch aller Kraft-Bewegungs-Modelle. Die wichtige Frage lautet dann, welche Kräfte auf den Körper - hier den Fallschirmspringer - einwirken. Dass die Gewichtskraft F_G eine Rolle spielt ist klar. Interessanter ist die Reibungskraft F_L, die von der Luft auf den Springer (und seinen Schirm) ausgeübt wird. An dieser Stelle können Plausibilitätsüberlegungen weiterhelfen. Die Reibungskraft wird abhängen von:

- der Anströmgeschwindigkeit *v* (kennt man vom Gegenwind beim Fahrradfahren),
- der Fläche *A*, die von der Luft angeströmt wird (deshalb beugt man sich über den Lenker),
- der Form des angeströmten Körpers (aus der Automobilwerbung ist dafür das Stichwort "c_w-Wert" geläufig) und
- der Dichte *D* des Mediums, durch das der Springer fällt - also der Luftdichte (wird von Schülern als selbstverständlich vorausgesetzt und daher zunächst nicht genannt).

Wie man vor diesem Hintergrund zu der Gleichung

$$F_L = -\frac{1}{2} c_w \cdot A \cdot D \cdot v^2$$

kommt, kann man entweder ausführlich herleiten oder man teilt die Gleichung einfach mit. Das negative Vorzeichen berücksichtigt, dass die Reibungskraft entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung wirkt. Damit hat das Modell- (Gleichungs-) Fenster das Aussehen in Abb. 4. Um die Richtung der Luftreibungskraft korrekt zu berücksichtigen, geht die Geschwindigkeit als **v** ein.

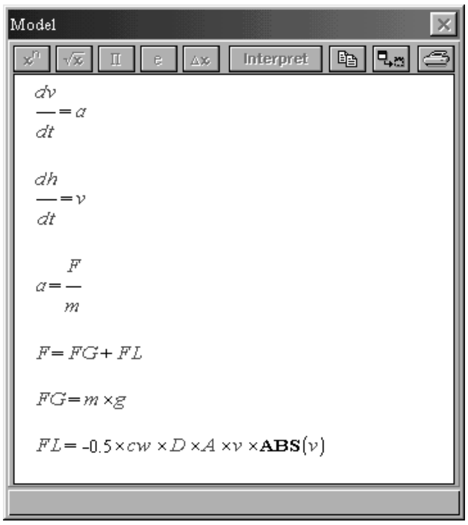


Abb. 4: Modell-Fenster bei Modellus.

Die Konstanten werden wie folgt abgeschätzt:

- Masse *m* des Springers mit Ausrüstung 100 kg
- Querschnittsfläche *A* vor der Öffnung des Fallschirms 1 m^2
- Luftdichte 1,3 kg/m^3

Am schwierigsten ist der c_w-Wert abzuschätzen. Es handelt sich um einen empirisch zu bestimmenden Faktor. Aus Tabellen lassen sich nur grobe Richtwerte ermitteln. Für eine Platte findet man z.B. Angaben von c_w = 1,1 bis c_w = 2. Es kommt auf das Verhältnis von Länge zu Breite und die Dicke der Platte an. Wir wählen als Wert 1. Dazu werden in einem gesonderten Fenster die Startparameter und die Konstanten festgelegt (s. Abb. 5). Die Startwerte für die iterativ zu berechnenden Größen *v* und *h* zum Zeitpunkt *t* = 0. Damit ist das Modell in einer ersten Fassung fertiggestellt (Parameter s. Abb. 5).

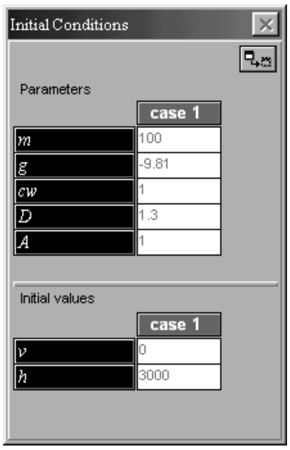


Abb. 5: Konstanten und Startwerte.

5.3 Erster Simulationslauf

Für einen Simulationslauf müssen die Zeitparameter festgelegt werden. Nach dem Zeitungsartikel liegt die Simulationsdauer bei einigen Minuten. Die Iterationsschrittweite sollte nicht größer als 0,1 s gewählt werden, da beim Öffnen des Schirms mit hohen Beschleunigungen zu rechnen ist, d.h. in kurzen Zeiträumen können sich drastische Effekte ergeben, die zeitlich fein aufgelöst werden müssen. Mit einer Simulationsdauer von 100s und $\Delta t = 0{,}1$ s ergibt sich die Vorhersage in Abb. 6.

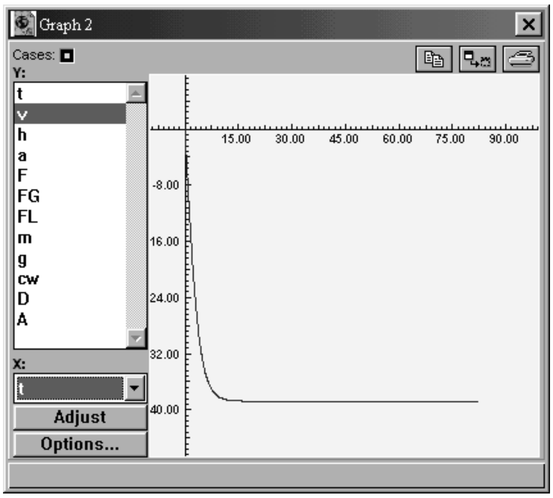


Abb. 6: Simulationsergebnis (Geschwindigkeit)

Man sieht, dass die Beschleunigungsphase nach dem Absprung bei etwa 15 s liegt. Es wird eine Fallgeschwindigkeit von knapp 40 m/s erreicht. Die Dauer der Phase des freien Falls bis auf eine Höhe von 1000 m liegt damit etwas über den oben genannten 44 s. Durch einen geringeren c_w-Wert oder eine geringere Querschnittsfläche ließe sich hier eine bessere Anpassung erreichen. Die Schüler sollen erkennen, dass eine Anpassung der Modellvorhersage an empirische Vergleichsdaten oftmals durch Variation der eingehenden Parameter zu erreichen ist, ohne das Modell in seiner physikalischen Struktur zu verändern. Allerdings muss der vorhergesagte Verlauf *qualitativ* korrekt sein.

5.4 Ausbau des Modells und neue Simulation

Im bisherigen Stand des Modells ist die Landung nicht berücksichtigt. Dafür muss sich der Fallschirm öffnen. Die einfachste Möglichkeit besteht darin, eine IF-Bedingung einzubauen:

IF(h>1000) THEN(A=1)
IF(h<=1000) THEN(A=40)

Der Wert von 40 m^2 ergibt sich aus einem abgeschätzten Schirmdurchmesser von 7 m. Für die Landegeschwindigkeit sagt das Modell in einem neuen Simulationslauf nun rund 6 m/s voraus - einen zulässigen Wert. Betrachten wir aber die Öffnung etwas genauer, so zeigt sich, dass - entfaltet sich der Schirm tatsächlich schlagartig von 1 auf 40 m^2 - in einem Zeittakt von z.B. 0,1s eine Geschwindigkeitsänderung von 34m/s auftritt, d.h. eine Beschleunigung von 340 m/s^2. Das ist entschieden zu hoch. Die Gurte des Schirms würden dem Springer in den Körper einschneiden. Um die Beschleunigung in Grenzen zu halten, muss sich der Schirm allmählich entfalten. Hier bietet sich eine interessante Aufgabenstellung für leistungsstärkere Schüler, wie man das ins Modell einbauen kann.

Eine elegante Lösung besteht darin, dem Schirm eine begrenzte Entfaltungsgeschwindigkeit $v_E = dA/dt$ zuzuordnen mit der Einheit "m^2/s". Dazu braucht man einen weiteren Differenzialquotienten. Bei einer Entfaltungsgeschwindigkeit von $v_E = 20\ m^2/s$ liegen die Beschleunigungen im Bereich von wenigen g und sind damit erträglich. Man muss nun noch durch modifizierte IF-Bedingung dafür sorgen, dass der Fallschirm nicht größer wird als 40 m^2. Die beiden letzten Abbildungen (Abb. 7 und 8) zeigen die Endfassung des Modells und die neue Vorhersage. Das Modell ist weiter ausbaufähig, z.B. auf die Bewegung von Meteoren durch die Erdatmosphäre (s. dazu Schecker 1998, 102ff.).

Das Programm Modellus bietet zusätzlich zur Ausgabe von Simulationsergebnissen als Diagramme und Tabelle auch die Möglichkeit, damit kleine Animationen zu steuern.

6. Abschließende Bemerkungen

Tabellenkalkulation und Modellbildungsprogramme ermöglichen es, komplexe, bisher auf Schulniveau nicht behandelte Phänomene aus Alltag und Technik dem Unterricht zugänglich zu machen. Es darf aber nicht übersehen werden, dass damit möglicherweise das Bild der Physik grundsätzlich verändert wird: Traditionelles Ziel jeder Wissenschaft, besonders der Physik, ist es, Beobachtungen von allem Nebensächlichen zu befreien, den Kern des Phänomens zu erkennen und so Einzeldeutungen zu einer umfassenden Theorie zu gestalten. Insoweit der Physikunterricht der gymnasialen Oberstufe sich wissenschaftspropädeutisch begreift, muss er diesen wissenschaftstheoretischen Aspekt verdeutlichen. Damit ist auch eine besondere Strategie zur Lösung eines Problems verbunden: Bei der Suche nach der geschlossenen Lösung wird das Problem soweit reduziert, dass es mit den zur Verfügung stehenden mathematischen Mitteln bearbeitbar wird. Im Physikunterricht wird jedoch oftmals die Begrenzung der zur Verfügung stehenden mathematischen Werkzeuge so dominant, dass physikalisch interessante und elementar beschreibbare Phänomene ausgeblendet werden. Hier sollen Modellbildungssysteme gegensteuern. Es darf aber nicht der Eindruck entstehen, als bestünde das Hauptbestreben der Physiker in der Lösung komplexer Einzelfälle.

Der große Vorteil der eigenständigen Modellbildung gegenüber fertigen Simulationsprogrammen liegt darin, dass die

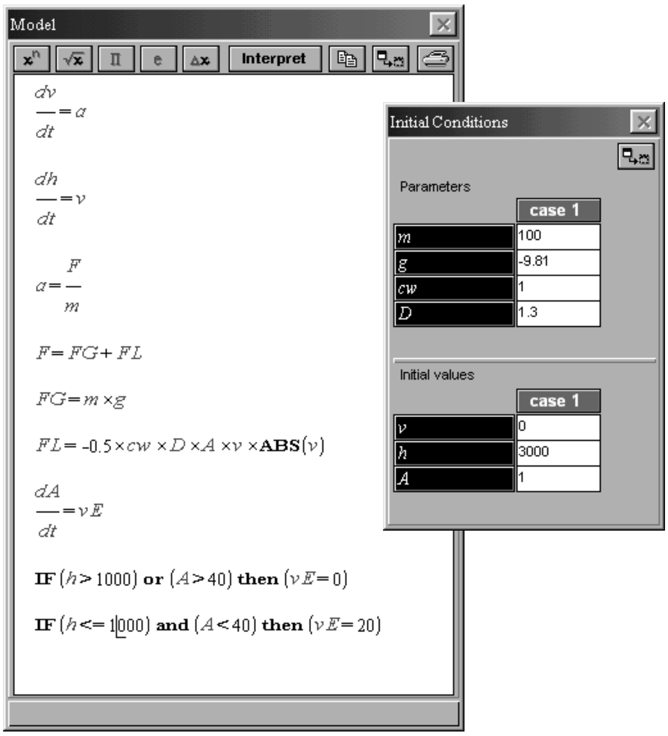


Abb. 7: Modellgleichungen und Parameter

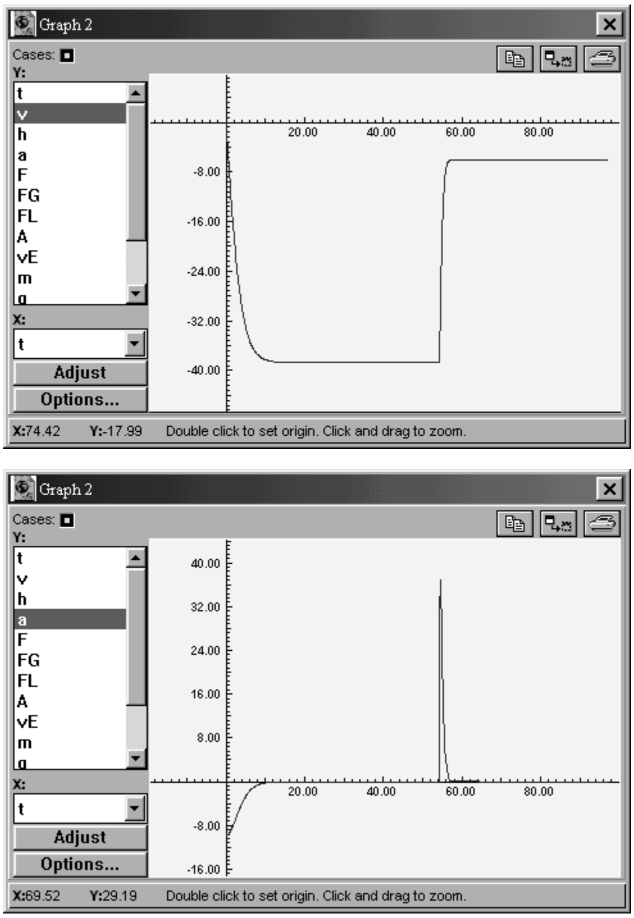


Abb. 8: Modellvorhersagen für Geschwindigkeit (oben) und Beschleunigung (unten). Bei t ≈ 55 s öffnet sich der Fallschirm; alle Angaben in SI-Einheiten.

Schüler die physikalischen Annahmen selbst formulieren müssen. Tabellenkalkulations- und Modellbildungsprogramme verfügen von sich aus über kein "physikalisches Wissen". Die Verantwortung für die physikalische Angemessenheit des Modells liegt beim Nutzer (Schüler, Lehrer). Das macht numerische Simulationen gleichzeitig anspruchsvoll und spannend.

Literatur

Misner, C.W. & Cooney, P.J. (1991): *SpreadSheet Physics Workbook.* Reading, MA: Addison-Wesley.

Ossimitz, G. (1990): *Materialien zur Systemdynamik.* Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Schecker, H. (1998): *Physik modellieren.* Stuttgart: Klett.

Software

Powersim. Bergen: Powersim AS.

Excel. München: Microsoft.

STELLA. Dartmouth, NH: High Performance Systems.

Moebius. Stuttgart: Klett.

Modellus. San Francisco, CA: Knowledge Revolution. (Die Software Modellus kostet ca. 100 Dollar. Sie finden Infos unter: http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus)