Eine einfache Methode zur Bestimmung der Entfernung und Größe des Mondes

Peter Habison

Eine der grundlegendsten Aufgaben der Astronomie ist die Bestimmung von Entfernungen im Weltall. Um allgemein ein Gefühl für diese Entfernungsskala zu entwickeln, sind eigene Beobachtungen und daraus abgeleitete Ergebnisse von großer Hilfe. Im Rahmen des internationalen Projektes Astronomy-On Line *wurde mit Schülern und Studenten auf der Kuffner-Sternwarte in Wien eine einfache Bestimmung der Entfernung und Größe des Mondes vorgenommen. Der vorliegende Artikel beschreibt das Prinzip einer Parallaxenbestimmung, die Messung und die daraus gewonnenen Ergebnisse.*

Einleitung und Prinzip

Die Beobachtung des Mondes durch ein Fernrohr ist stets ein beeindruckendes Erlebnis für jung und alt. Erstmalige Besucher einer Sternwarte erkennen sogleich die zahlreichen Krater, Ebenen und Gebirge des Mondes im Detail und stellen rasch die Frage nach der Entfernung und Größe unseres Nachbarn im All. Die Antwort darauf kann heute mittels moderner Lasertechnologie bis auf wenige Zentimeter genau gegeben werden, sie vermittelt jedoch kein Gefühl über die wahren Entfernungsverhältnisse und erfordert das Verständnis einer komplizierten Methode der Vermessung. Eigene Beobachtungen und daraus abgeleitete Entfernungen sind von großer Hilfe bei der Erarbeitung der Problemstellung und regen oft zur weiteren Beschäftigung mit dem Thema an. Das bei der Beobachtung der Entfernung verwendete Prinzip beruht auf der Vermessung von Winkeln und der Berechnung ebener Dreiecke. Neben einfachen Gesetzen der ebenen Trigonometrie ist nur grundlegende Mathematik erforderlich.

Wenden wir uns gleich dem Begriff der "Parallaxe" zu. Spricht man von einer sog. "trigonometrischen Parallaxe", so handelt es sich um jenen Winkel, unter welchem ein naher Gegenstand von zwei unterschiedlichen Standorten aus betrachtet, gegenüber dem weit entfernten Hintergrund erscheint. Nehmen wir als Beispiel unsere beiden Augen als "linken" und "rechten" Standort und den Daumen unserer ausgestreckten Hand als nahen "Gegenstand". Als Hintergrund kann ein weiter entfernter Baum, ein Haus oder sonst irgendein Objekt verwendet werden. Betrachten wir nun unseren Daumen einmal mit dem rechten und dann mit dem linken Auge, so "springt" der Daumen vor dem Hintergrund "hin und her". Jener Winkel, um welchen der Daumen springt, wird als "Parallaxe" bezeichnet. Abb. 1 (nicht maßstabsgetreu) zeigt dies anhand zweier Beobachter auf der Erdkugel. Beobachter 1 befindet sich beispielsweise in Europa, Beobachter 2 in Afrika. Beide beobachten den Mond vor dem weit entfernten Himmelshintergrund. Für Beobachter 2 entspricht die Deklination des Mondes (dies ist seine Abweichung in Grad vom Himmelsäquator) seiner geographischen Breite. Beobachter 1 hingegen sieht den Mond um den Winkel α gegen den Hintergrund verschoben - diesen

Dipl.-Ing. Peter Habison ist Leiter der Kuffner-Sternwarte in Wien-Ottakring

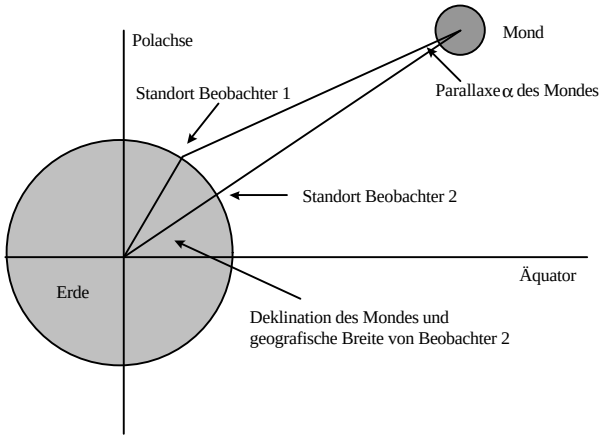


Abb. 1: Die geometrischen Verhältnisse bei der Beobachtung des Mondes durch Beobachter 1 und 2 auf unterschiedlichen geographischen Breiten. Eingezeichnet ist neben der Deklination des Mondes auch seine Parallaxe zwischen Beobachter 1 und 2.

Winkel bezeichnet man nun als die Parallaxe α des Mondes in bezug auf die beiden Beobachter 1 und 2.

Die Methode der Parallaxenbestimmung ist für die Astronomie von grundlegender Bedeutung, erlaubt sie doch die Vermessung unserer näheren astronomischen Umgebung. Da die Methode auf der Messung von Winkeln beruht und diese bei weit entfernten Objekten immer schwieriger zu vermessen sind, ist ihre Reichweite beschränkt. Dennoch konnten mit trigonometrischen Parallaxen von der Erde u.a. die Entfernungen der Venus, des Merkur und einiger naher Sterne (bis zu etwa 300 Lichtjahre) vermessen werden. Der Astrometrie-Satellit HIPPARCOS, welcher die Messungen außerhalb der Erdatmosphäre durchführen konnte und dessen Kataloge nun fertiggestellt sind, vermaß sogar über 100.000 Sterne bis zu einer Entfernung von ca. 3300 Lichtjahren in unserer Galaxis. Seine Ergebnisse veränderten unsere Vorstellung über die Größe des Universums um ca. 10%!

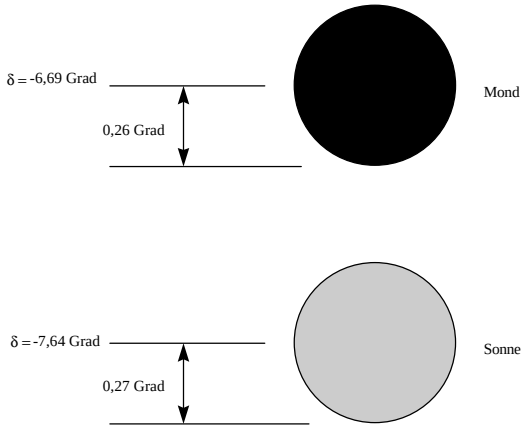


Abb. 2a: Vom Mittelpunkt der Erde (oder von Beobachter 2) aus betrachtet kommt es zu keiner Sonnenfinsternis. Sonne und Mond überdecken einander nicht. Eingezeichnet sind Deklination und scheinbare Halbmesser von Sonne und Mond in Winkelgrad.

Die Beobachtung der Finsternis

Die Messung der Mondparallaxe kann nach zwei einfachen Varianten der grundlegenden Methode durchgeführt werden. Die erste Variante der Entfernungsmessung erfordert zwei Beobachter auf unterschiedlichen geographischen Breiten, jedoch mit möglichst gleicher geographischer Länge. Die Beobachtungsergebnisse müssen dann zur Bestimmung der Entfernung des Mondes kombiniert werden. Die zweite Variante erfordert nur einen Beobachter, jedoch die genauen geozentrischen Koordinaten von Mond und Vergleichsobjekt am Himmel. Diese Koordinaten müssen einem astronomischen Jahrbuch entnommen werden. Da nicht immer ein Beobachtungspartner in einem anderen Land zur Verfügung steht, soll im folgenden Variante 2 beschrieben werden.

Als Möglichkeit zur Messung der Mondparallaxe bot sich die partielle Sonnenfinsternis vom 12. Oktober 1996 ideal an. Für die Beobachtung wurde ein kleines Spiegelteleskop mit 8 Zoll Durchmesser und fest verbundenem Projektionsschirm für das Sonnenbild verwendet. Vor Beginn der Finsternis wurde die Größe des Sonnenbildes am Schirm eingestellt und während der gesamten Messung unverändert belassen. Um den kleinsten Abstand der Mittelpunkte von Sonne und Mond zu messen, mußte der Zeitpunkt der größten Bedeckung ermittelt werden. Dies konnte durch regelmäßige Aufzeichung (alle 5 Minuten) des Durchmessers H der Sonne und der Höhe Δh erreicht werden (siehe hierzu Abb. 2b). Trägt man das Verhältnis $\Delta h/H$ als Funktion der Zeit auf und sucht das Minimum, so erhält man den Zeitpunkt der größten Bedeckung. In Abb. 3 ist ein derartiges Diagramm mit den gemessenen Werten vom 12. Oktober 1996 für Wien abgebildet. Für den Zeitpunkt der maximalen Bedeckung vermißt man sodann die Distanz der Mittelpunkte von Sonne und Mond ($\Delta\delta_2$) am Schirm (z.B. in cm). Die dieser Abstandsbestimmung ist die Beobachtung abgeschlossen und es folgt die Auswertung der Daten.

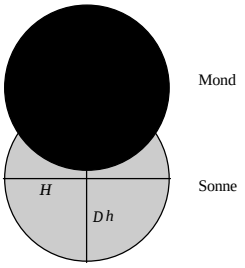


Abb. 2b: Von Beobachter 1 aus betrachtet ist die Sonnenfinsternis sichtbar, Sonne und Mond überdecken einander. Eingezeichnet sind die "Höhe" Δh und der Sonnendurchmesser H .

Die Vorgangsweise der Berechnung

Für die Berechnung betrachten wir Abb. 4. Sie zeigt die geometrischen Verhältnisse bei der Beobachtung (exakt nur für Beobachtungen im Meridian). Das eingezeichnete Dreieck setzt sich aus folgenden Entfernungen bzw. Winkeln zusammen: Entfernung b vom Beobachter zum Mond, Entfernung r des Beobachters zum Erdmittelpunkt (Erdradius), Entfernung d der Mittelpunkte Erde-Mond, Parallaxe α des Mondes und der Winkel $\phi - \delta$, wobei ϕ die geographische Breite des Beobachters und δ die Deklination des Mondes sind. Bis auf die Entfernung d des Mondes sind die restlichen Größen bekannt und können mit Hilfe des Sinussatzes einfach berechnet werden. Zuvor jedoch muß die Parallaxe α des Mondes aus der Beobachtung gewonnen werden. Da wir keinen zweiten Beobachter auf einer anderen geographischen Breite zur Verfügung haben, müssen wir die Deklination von Sonne und Mond für den Zeitpunkt der größten Annäherung einem guten astronomischen Jahrbuch entnehmen. Wir verwendeten hierfür den *Astronomical Almanac 1996*, welcher für den Zeitpunkt der maximalen Bedeckung folgende Werte angibt:

- Deklination der Sonne: -7,64°
- Deklination des Mondes: -6,69°

Die scheinbaren Winkeldurchmesser von Sonne und Mond am Himmel wurden mit Hilfe der Erdrotation bestimmt und ergaben die folgenden Werte:

- Winkeldurchmesser der Sonne: 0,54°
- Winkeldurchmesser *D'* des Mondes: 0,52°

Die Parallaxe α des Mondes ergibt sich, wie leicht einzusehen ist, aus der Differenz der Deklinationswerte von Sonne und Mond zum Zeitpunkt der maximalen Bedeckung ($\Delta\delta_1$) und der Differenz des beobachteten Mittelpunktabstandes Sonne-Mond ($\Delta\delta_2$):

$$\alpha = \Delta\delta_1 - \Delta\delta_2$$

Mit Hilfe des scheinbaren Winkeldurchmessers von Sonne oder Mond kann $\Delta\delta_2$ leicht von [cm] in [Grad] umgerechnet werden. Nun ergibt die Anwendung auf das ebene Dreieck in Abb. 4:

$$\frac{\sin\beta}{d} = \frac{\sin\alpha}{r}$$

Der dritte Winkel β im Dreieck kann aus der Winkelsumme leicht berechnet werden. Damit ergibt sich für die Entfernung d des Mondes:

$$d = \frac{r\,\sin(180 - \alpha - \phi - \delta)}{\sin\alpha}$$

Der wahre Durchmesser D des Mondes ist nun einfach aus der scheinbaren Größe des Mondes *D'* am Himmel und seiner Entfernung d von der Erde mit der Beziehung

$$D = 2\,d\,\tan\left(\frac{D'}{2}\right)$$

berechenbar.

Die Ergebnisse

Für die endgültigen Berechnungen wurden noch folgende Werte aus der Literatur verwendet: Erdradius r = 6378 km und geographische Breite ϕ für Wien = +48,2°. Mit der gemessenen Parallaxe α = 0,76° ergibt sich die Entfernung (für den 12. Oktober 1996) und der Durchmesser des Mondes schließlich zu:

	Berechnet	**Literaturwert** (aus: *Astronomical Almanac 1996*)
Entfernung am 12.10. `96 in [km]	396.990	392.577
Durchmesser in [km]	3.603	3.475

Bedenkt man, welche einfache Methode und welch kleines Instrument verwendet wurden, so ist die Abweichung von den Literaturwerten erstaunlich gering. Der Fehler der Mondent-

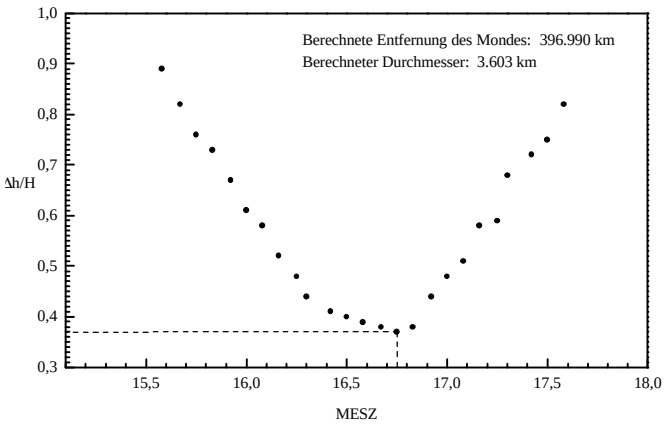


Abb. 3: Diagramm zur Bestimmung des Zeitpunktes der maximalen Verfinsterung. Die etwas größere Streuung der Werte nach dem Minimum ist auf den schon tieferen Stand von Sonne und Mond gegen Ende der Finsternis zurückzuführen.

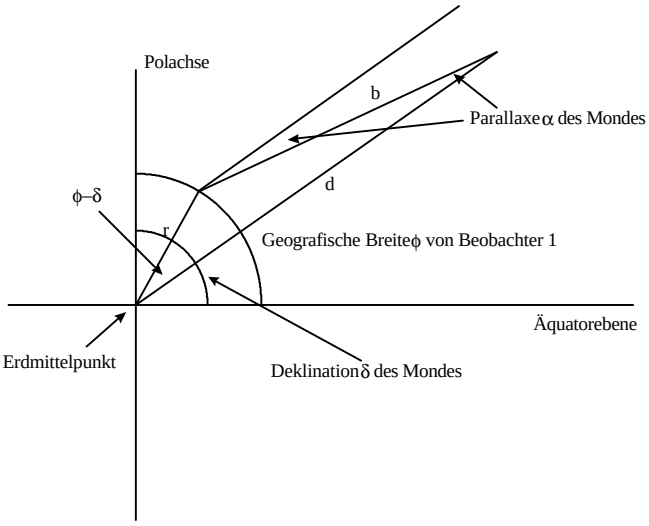


Abb. 4: Die geometrischen Verhältnisse im allgemeinen Dreieck zwischen Erdmittelpunkt, Mond und Beobachter. Die Beschreibung der einzelnen Größen erfolgt im Text.

fernung aufgrund der Ungenauigkeit der Beobachtung und der vereinfachten Modellannahme (zweidimensionale Methode) liegt bei ca. ± 5000 km. Die tatsächlichen Werte liegen im Bereich des Fehlers.

Die Vorbereitung, Beobachtung und Berechnung der Mondentfernung bereitete den mitwirkenden Schülern und Studenten eine große Freude. Für viele war dies ihre "erste Vermessung des Himmels". Als Abschluß der Arbeit wurden die Ergebnisse auf der internationalen Homepage des Projekts "Astronomy On-Line" zusammengestellt und präsentiert.

Der Tag, an dem sich die Sonne (teilweise) verdunkelte

Michael Teubenbacher

Es war ein wunderschöner Samstagnachmittag, der 12.10.1996, und nichts deutete auf das bevorstehende Naturereignis, eine partielle Sonnenfinsternis, hin. Um 15 Uhr trafen wir uns, einige Schüler der 6A. Es blieben uns noch 30 Minuten bis zu Beginn dieses "Spektakels". Zeit genug, so meinten wir, um unsere "Apparaturen" aufzubauen. Doch das Suchen eines geeigneten Platzes nahm soviel Zeit in Anspruch, daß wir die ersten Messungen erst einige Minuten nach Beginn der Sonnenfinsternis nehmen konnten.

Als Ort für unsere Messungen wählten wir schließlich eine größere freie Fläche vor der Porzellanmanufaktur im Augarten. Dieser Platz hatte den Vorteil, daß keine Bäume störenden Einfluß auf unsere Beobachtungen nehmen konnten.

Unsere Ausrüstung bestand aus:

- mit Ruß geschwärzte Glasplatten, um die Sonne ohne Schädigung der Augen die Sonne beobachten zu können.
- 2 Stativen
- einem Fotoapparat mit speziellen Filter
- einem Spiegel, mit dem wir das Abbild der Sonne auf eine Leinwand projizierten.
- zwei Ferngläser, mit den wir das Abbild der Sonne auf ein Blatt Papier projizierten.
- verschiedenen Meßgeräten (Uhr, Geodreieck, Maßband,...)
- einer Camera Obscura: in unserem Fall ein ca. 2 m langes Rohr mit einem Durchmesser von ca. 2 cm. Dieses ist vorne mit schwarzen Papier mit einem sehr kleinem Loch (ca. 1 mm) in der Mitte und hinten mit Transparentpapier beklebt. Durch die vordere Öffnung wird das Sonnenlicht eingefangen und auf das Transparentpapier am anderen Ende scharf abgebildet.

Kaum hatten wir unsere Arbeit begonnen, waren interessierte Zuschauer um uns versammelt. Bereitwillig erklärten wir ihnen den Zweck unserer Messungen und unsere Arbeitsweise.

Für unsere Arbeit gab es drei Schwerpunkte:

Das Beobachten. Mit Hilfe von rußgeschwärzten Glasscheiben. konnten wir völlig gefahrlos in die Sonne schauen und die Umrisse der Sonne mit dem Mondschatten scharf erkennen. Auch vorbeikommenden Spaziergängern, die Interesse an der

Michael Teubenbacher (6. Kl. Naturwiss. RG, Wien-Brigittenau). Dieser Bericht wurde von Prof. Mag. Ilse Bartosch zur Verfügung gestellt.

partiellen Sonnenfinsternis zeigten, konnten wir es so ermöglichen, sie sehen.

Das Fotografieren. Durch den erwähnten Filter war es möglich, die Finsternis abzulichten. Um noch schärfere Aufnahmen zu erhalten, hielten wir bei manchen Fotos zusätzlich ein geschwärztes Glas vor die Linse.

Den wesentlichsten Anteil der Arbeit dieses Nachmittages stellte die *systematische Beobachtung* dar.

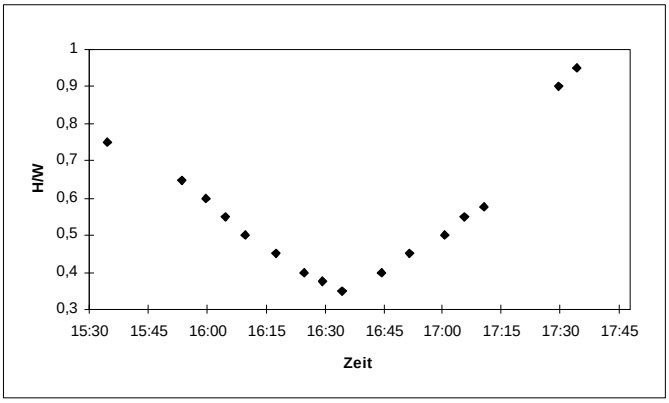
Wir wendeten 2 Methoden an:

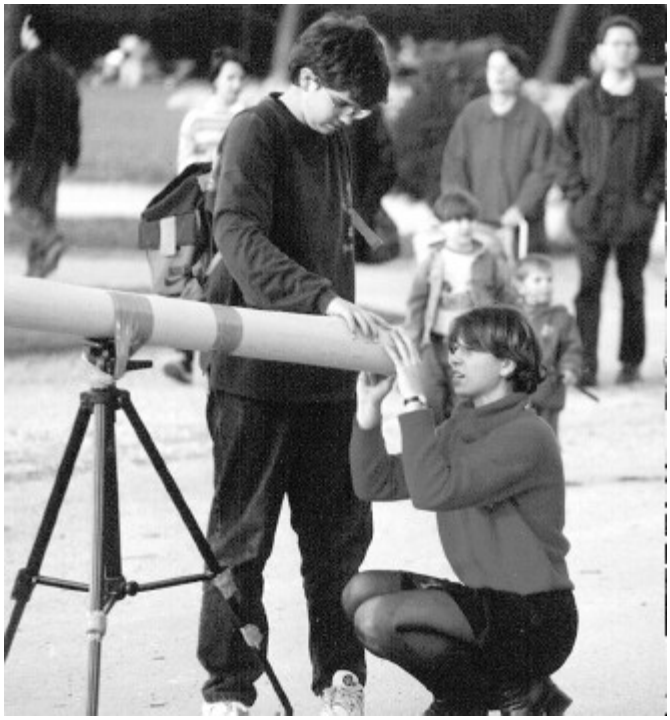
1. Das Abbild der Sonne wurde mit Hilfe eines Spiegels auf eine Leinwand, die im Schatten stand, projiziert. Nun war der Umriß der Sonne auf der Leinwand gut erkennbar, und man konnte den Verlauf der Sonnenfinsternis genau beobachten. Alle 5 Minuten wurde vermessen, wie weit der Mond die Sonne verdeckte. Verglich man die Daten miteinander, so war erkennbar, wie die Sonnenfinsternis sich entwickelt und wann sie ihren Höhepunkt erreicht hatte.
2. Wir richteten unsere Camera Obscura auf die Sonne. War sie genau ausgerichtet, so zeichnete sich der Sonnenumriß auf dem Transparentpapier ab. Dieses Abbild ermöglichte es uns die "Daten" der Finsternis zu bestimmen. (siehe Tabelle und Abbildung)

Insgesamt dauerte unsere Arbeit von 15.30 bis 17.30. Eigentlich dauerte die Sonnenfinsternis bis 17.47, doch Bäume machten ein weiteres Beobachten der schon sehr tief stehenden Sonne unmöglich. Somit war ein sehr schöner Nachmittag und zugleich ein seltenes Spektakel zu Ende gegangen, und zufrieden mit den Ergebnissen unserer Arbeiten traten wir den Heimweg an.

Abstand Loch - Schirm: 2,31 m
Breite der Sonnenscheibe auf Schirm: 2 cm

Zeit	Höhe (in cm)	H/W	Zeit	Höhe (in cm)	H/W
15:35	1,5	0,75	16:35	0,7	0,35
15:54	1,3	0,65	16:45	0,8	0,4
16:00	1,2	0,6	16:52	0,9	0,45
16:05	1,1	0,55	17:01	1	0,5
16:10	1	0,5	17:06	1,1	0,55
16:18	0,9	0,45	17:11	1,15	0,575
16:25	0,8	0,4	17:30	1,8	0,9
16:30	0,75	0,375	17:35	1,9	0,95





Arbeit mit der Camera Obscura im Wiener Augarten

Kräftemessen mit Magdeburger Halbkugeln zwischen Prof. Kutschera (re.), dem Organisator der ÖPG Jahrestagung 1997, und Prof. Kühnelt im Anschluß an die Präsentation "1000 Jahre Naturwissenschaften in Österreich" durch Schüler des BG Horn (siehe Bericht Seite 32)