

## Beispiele der 26. Internationalen Physikolympiade – Teil 2

### Aufgabe 2

#### Schallausbreitung

**Einleitung:** Die Ausbreitungsgeschwindigkeit für Schallwellen im Ozean hängt ab von der Tiefe, der Temperatur und der Salzkonzentration. In der nachfolgenden Abbildung 1(a) ist die Veränderung der Schallgeschwindigkeit  $c$  dargestellt als Funktion der Tiefe  $z$  für den Fall, daß ein Minimum  $c_0$  der Geschwindigkeit in der Mitte zwischen der Seeoberfläche und dem Seeboden existiert. Beachte, daß zur Vereinfachung die Tiefe dieses Minimums der Schallgeschwindigkeit als  $z = 0$  gesetzt wurde, und damit ist  $z = z_s$  die Oberfläche und  $z = -z_b$  der Seeboden.

Oberhalb von  $z = 0$  ist die Geschwindigkeit gegeben durch:  $c = c_0 + b_z$   
unterhalb  $z = 0$  ist  $c$  gegeben durch:  $c = c_0 - b_z$

In beiden Fällen gilt  $b = |dc/dz|$ , d.h.  $b$  ist der Absolutwert der Ableitung der Geschwindigkeit mit der Tiefe;  $b$  wird als konstant angenommen.

Die Abbildung 1(b) zeigt einen Querschnitt durch den Ozean in der  $z$ - $x$ -Ebene, wobei  $x$  die horizontale Richtung ist. Für jeden Punkt in der  $z$ - $x$ -Ebene ist das Geschwindigkeitsprofil  $c(z)$  gegeben durch Abbildung 1(a). Im Punkt  $z = 0, x = 0$  existiert eine Schallquelle  $S$ . Ein Teil des Schalles, der von dieser Quelle ausgesandt wird, kann durch einen Strahl beschrieben werden, der, wie dargestellt, von  $S$  unter einem Winkel  $\Theta_0$  ausgeht. Aufgrund der Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Tiefe  $z$  wird der Strahl gebrochen. Dies führt zu einer Änderung von  $\Theta$  entlang des Strahles.

#### (a) (6 Punkte)

Zeige, daß die Anfangsbahn des die Quelle verlassenden Schallstrahles innerhalb der  $z$ - $x$ -Ebene durch einen Kreisbogen mit dem Radius  $R$  gegeben ist, mit

$$R = \frac{c_0}{b \sin \Theta_0} \quad \text{für } 0 \leq \Theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$$

#### (b) (3 Punkte)

Leite eine Formel für den kleinstmöglichen Wert des Winkels  $\Theta_0$  her für einen nach oben gerichteten Schallstrahl, der nicht an der Oberfläche reflektiert wird;  $\Theta_0$  soll durch  $z_s, c_0$  und  $b$  ausgedrückt werden.

#### (c) (4 Punkte)

Abbildung 1(b) zeigt die Position eines Schallempfängers  $H$  an, der sich an der Stelle  $z = 0, x = X$  befindet. Leite eine Formel für die Folge von Werten des Winkels  $\Theta_0$  her, die ein Schallstrahl beschreiben kann, der von  $S$  zum Empfänger  $H$  geht. Nimm an, daß  $z_s$  und  $z_b$  so groß sind, daß keine Reflexion an der Seeoberfläche oder am Seeboden auftritt; drücke  $\Theta_0$  durch  $b, X$  und  $c_0$  aus.

#### (d) (2 Punkte)

Bestimme die vier kleinsten Werte von  $\Theta_0$  für Strahlen, die von  $S$  ausgehen und  $H$  erreichen, unter der Bedingung

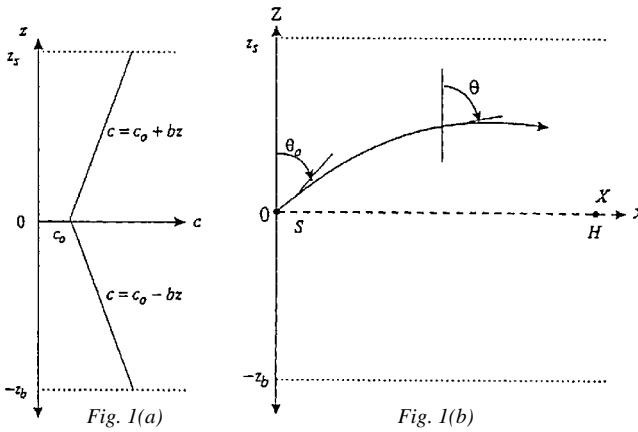
$$X = 10000 \text{ m}, c_0 = 1500 \text{ m/s}, b = 0,02 \text{ s}^{-1}$$

#### (e) (5 Punkte)

Leite eine Formel her für die Zeit, die der Schall benötigt, um von  $S$  nach  $H$  auf einer Bahn mit dem kleinstmöglichen Winkel  $\Theta_0$  zu gelangen, wie dies in Teil (c) beschrieben worden ist. Berechne den Zahlenwert dieser Zeit unter den Bedingungen, die in (c) gegeben worden sind. Die folgende Formel könnte hilfreich sein:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \text{Intan} \left( \frac{x}{2} \right)$$

Berechne die Zeit für den direkten Weg des Strahles von  $S$  nach  $H$  entlang  $z = 0$ . Welcher Strahl wird zuerst ankommen, der Strahl mit  $\Theta_0 = \pi/2$  oder der Strahl mit dem kleinstmöglichen Wert von  $\Theta_0$ , wie er in Teil (d) berechnet worden ist?

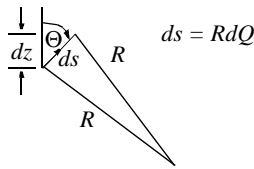


## Solution to Question 2

### (a) 6 marks

Snell's Law may be expressed as:  $\frac{\sin \Theta}{\sin \Theta_0} = \frac{c}{c_0}$  (1)

Consider some element of ray path  $ds$  and treat this as, locally, an arc of a circle of radius  $R$ . Note that  $R$  may take up any value between  $-\infty$  and  $\infty$ . Consider a ray component which is initially directed upward from  $S$



From (1)  $\cos \Theta d\Theta = \frac{\sin \Theta_0}{c_0} dc$

For the upwardly directed ray  $c = c_0 + bz$ , so  $dc = b dz$  and

$$\frac{\sin \Theta_0}{c_0} b dz = \cos \Theta d\Theta \quad \text{hence}$$

$$dz = \frac{c_0}{\sin \Theta_0} \frac{1}{b} \cos \Theta d\Theta$$

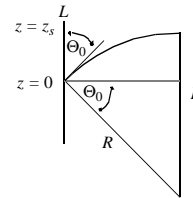
We may also write (here treating  $ds$  as straight)  $dz = ds \cos \Theta$  so

$$ds = \frac{c_0}{\sin \Theta_0} \frac{1}{b} d\Theta \quad \text{hence}$$

$$\frac{ds}{d\Theta} = R = \frac{c_0}{\sin \Theta_0} \frac{1}{b}$$

This result strictly applies to the small arc segment  $ds$ . Note that from equation (1) however, it also applies for all  $\Theta$ , i.e. at all points along the trajectory, which therefore forms an arc of a circle with radius  $R$  until the ray enters the region  $z < 0$ .

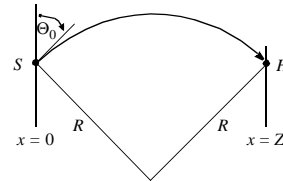
### (b) 3 marks



Here  $z_s = R - R \sin \Theta_0 = R(1 - \sin \Theta_0) = \frac{c_0}{b \sin \Theta_0} (1 - \sin \Theta_0)$

From which  $\Theta_0 = \sin^{-1} \left[ \frac{c_0}{bz_s + c_0} \right]$

### (c) 4 marks

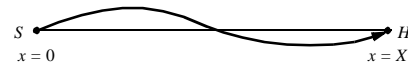


$$X = 2R \cos \Theta_0 = \frac{2c_0}{b \sin \Theta_0} \cos \Theta_0 = \frac{2c_0}{b} \cot \Theta_0$$

hence  $\cot \Theta_0 = \frac{bX}{2c_0}$

What other possibilities exist for rays to reach H?

Here is one



Here  $\frac{X}{2} = 2R \cos \Theta_0 = \frac{2c_0}{b} \cot \Theta_0$

i.e.  $\cot \Theta_0 = \frac{bX}{4c_0}$

In general, for values of  $\Theta_0 < \pi/2$ , rays emerging from  $S$  will reach  $H$  for launch angles given by:

$$\Theta_0 = \cot^{-1} \left[ \frac{bX}{2nc_0} \right] = \tan^{-1} \left[ \frac{2nc_0}{bX} \right], \quad \text{where } n = 1, 2, 3, 4 \dots$$

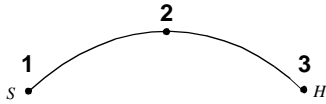
Note that  $n = \infty$ ,  $\Theta_0 = \pi/2$ , as expected for the axial ray.

### (d) 2 marks

With the values cited, the four smallest values of launch angle are:

n	$\Theta_0$ (degrees)
1	86,19
2	88,09
3	88,73
4	89,04

(e) 5 marks



We seek  $\int_1^3 dt = \int_1^3 \frac{ds}{c}$

Try first  $t_{12} = \int_1^2 \frac{ds}{c} = \int_{\Theta_0}^{\pi/2} \frac{R d\Theta}{c}$ , using  $R = \frac{c}{b \sin \Theta}$

Gives  $t_{12} = \frac{1}{b} \int_{\Theta_0}^{\pi/2} \frac{d\Theta}{\sin \Theta}$

so that  $t_{12} = \frac{1}{b} \left[ \ln \tan \left( \frac{\Theta}{2} \right) \right]_{\Theta_0}^{\pi/2} = -\frac{1}{b} \ln \tan \left( \frac{\Theta_0}{2} \right)$

Noting that  $t_{13} = 2t_{12}$  gives  $t_{13} = -\frac{2}{b} \ln \tan \left( \frac{\Theta_0}{2} \right)$

For the specified  $b$ , this gives a transit time for the smallest value of launch angle cited in the answer to part (d) of  $t_{13} = 6.6546$  s

The axial ray will have travel time given by  $t = \frac{X}{c_0}$

For the conditions given  $t_{13} = 6.6666$  s

Thus the axial ray takes longer than the example cited for  $n = 1$ .

Thus the  $n = 1$  ray will arrive first.

### Aufgabe 3

#### Eine zylindrische Boje

(a) (3 Punkte)

Eine Boje besteht aus einem homogenen Vollzylinder (Radius  $a$ , Länge  $l$ , aus leichtem Material der Dichte  $d$ ) und einem daran befestigten homogenen, starren Stab, der an der Stelle  $l/2$  radial am Zylindermantel befestigt ist. Die Stabmasse ist gleich der Zylindermasse und die Stablänge ist gleich dem Zylinderdurchmesser. Die Dichte des Stabes ist größer als jene des Meerwassers. Diese Boje schwimmt im Meerwasser (Dichte  $\rho$ ).

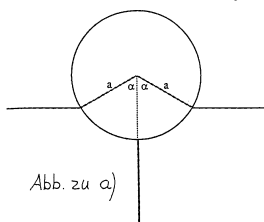


Abb. zu a)

Leite für den Gleichgewichtszustand einen Ausdruck her, in dem der Winkel  $\alpha$  (siehe Zeichnung) mit dem Dichteverhältnis  $d/\rho$  verknüpft ist. Das Volumen des Stabes kann vernachlässigt werden.

(b) (4 Punkte)

Wenn die Boje in vertikaler Richtung um eine kleine Auslenkung  $z$  hinuntergedrückt wird, gibt es eine rücktreibende Kraft, und die Boje beginnt vertikale Schwingungen um die Gleichgewichtslage durchzuführen.

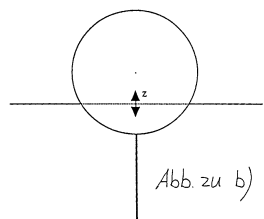
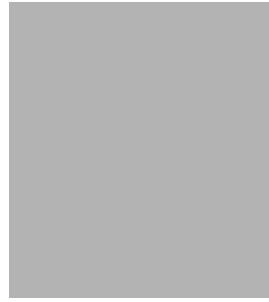


Abb. zu b)

Bestimme die Frequenz dieser Schwingungen in Abhängigkeit von  $\alpha$ ,  $a$  und der Fallbeschleunigung  $g$ . Nimm dabei an, daß die effektive Masse der Boje sich infolge der Bewegung des Wassers während der Schwingungen um ein Drittel erhöht. Nimm außerdem an, daß  $\alpha$  nicht klein ist.

(c) (8 Punkte)

Nun soll näherungsweise angenommen werden, daß das System Schwingungen um die horizontale Zylinderachse ausführt.



Bestimme die Frequenz dieser Pendelschwingungen in Abhängigkeit von  $\alpha$  und  $g$ . Die Bewegungen des Wassers und seine Viskosität sollen vernachlässigt werden. Betrachte nur kleine Auslenkungswinkel ( $\Theta$ ).

(d) (5 Punkte)

Auf der Boje gibt es empfindliche Beschleunigungsmesser, die die beiden betrachteten Schwingungstypen registrieren und die Informationen zur Küste übermitteln. In relativ ruhigem Wasser wird eine vertikale Schwingungsdauer von etwa 1 Sekunde und eine Pendelschwingungsdauer von etwa 1,5 Sekunden festgestellt.

Zeige, daß dem ein Winkel  $\alpha$  von ungefähr  $90^\circ$  entspricht und schätze damit den Radius und die Gesamtmasse der Boje ab. Die Zylinderlänge  $l$  soll gleich dem Zylinderradius  $a$  sein.

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3, \quad g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

### Solution of Question 3

(a)

The mass of the flat rod is given equal to the mass of the cylinder  $M$  which itself is  $\pi a^2 l d$ . Thus the total mass equals  $2M = 2\pi a^2 l d$ . The mass of the displaced water is surely less than  $\rho a^2 l$  (when the buoy is on the verge of sinking). Using Archimedes' principle, we may at the very least expect that the  $2\pi a^2 l d < \rho a^2 l$  or  $d < \rho/2$ .

In fact, with the float angle  $\alpha$  ( $< \pi$ ) as drawn, the volume of displaced water is obtained by geometry:

$$V = l a^2 \alpha - l a^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

By the Archimedes' principle the mass of the buoy equals the mass of displaced water. Therefore  $2\pi a^2 l d = l a^2 \rho [\alpha - \cos \alpha \sin \alpha]$ , ie  $\alpha$  is determined by the relation,

$$\alpha - \cos \alpha \sin \alpha = \alpha - 1/2 \sin 2\alpha = 2d\pi/\rho$$

(b)

If the cylinder is depressed a small distance  $z$  vertically from equilibrium, the net upward restoring force is the weight of the extra water displaced or  $\rho \cdot 2a \sin \alpha \cdot lz$ , directed oppositely to  $z$ . This is characteristic of simple harmonic motion and hence Newtonian equation of motion of the buoy is (taking account of the extra factor 1/3)

$$8M\ddot{z}/3 = -2\rho g l z a \sin \alpha \quad \text{or} \quad \ddot{z} + \frac{3\rho g \sin \alpha}{4\pi d a} z = 0$$

and this is the standard sinusoidal oscillation equation (like a simple pendulum). The solution is of the type  $z = \sin(\omega z t)$ , with the angular frequency

$$\omega_z = \sqrt{\frac{3\rho g \sin \alpha}{4\pi d a}} = \sqrt{\frac{3g \sin \alpha}{2a(\alpha - \cos \alpha \sin \alpha)}}$$

where we have used the relation worked out at the end of part (a)

Alternatively  $\omega_z = \sqrt{\frac{3g\rho a l \sin \alpha}{2M}}$  where  $M$  = mass of buoy which must be worked out before and referenced.

(c)

Without regard to the torque, if the buoy is swung by some angle so that its weight is supported by the net pressure of the water outside, the volume of water displaced is the same as in equilibrium. Thus the centre of buoyancy remains at the same distance from the centre of the cylinder. Consequently we may deduce that the buoyancy arc is an arc of a circle centred in the middle of the cylinder. In other words, *the metacentre M of the swinging motion is just the centre of the cylinder.*

We should also notice that the centre of mass *G* of the buoy is at the point where the rod touches the cylinder, since the masses of rod and cylinder are each equal *M*. Of course the cylinder will experience a net torque when the rod is inclined to the vertical. To find the period of swing, we first need to determine the moment of inertia about the metacentre **M**. Start by finding the moment of inertia of the solid cylinder about the central axis; this is just like a disk about the centre. Thus if *M* is the cylinder mass

$$I_0 = Ma^2/2 \left( = \int_0^a r^2 dm = \int_0^a r^2 2Mr dr/a \right)$$

The next step is to find the moment of inertia of the rod about its middle,

$$I_{rod} = \int_{-a}^a (Mdx/2a)x^2 = [Mx^3/6a]_{-a}^a = Ma^2/3$$

Finally, use the parallel axis theorem to find the moment of inertia of the buoy (cylinder + rod) about its metacentre **M**,

$$I_M = Ma^2/2 + [Ma^2/3 + M(2a)^2] = 29Ma^2/6$$

When the buoy swings by an angle  $\theta$  about equilibrium the restoring torque is  $2Mga \sin \theta \approx 2Mga \theta$  for small angles, which represents simple harmonic motion (like a simple pendulum). Therefore the Newtonian equation of motion is

$$I_M \ddot{\theta} \equiv -2Mga \theta \quad \text{or} \quad \ddot{\theta} + \frac{12g}{29a} \theta = 0$$

The solution is a sinusoidal function,  $\theta \propto \sin(\omega_\theta t)$ , with angular frequency  $\omega_\theta = \sqrt{12g/29a}$

(d)

Accelerometer measurements give  $T_\theta/T_z \approx 1.5$  or

$$(\omega_\theta/\omega_z)^2 \approx 9/4 \approx 2.25. \text{ Hence}$$

$$2.25 = \frac{3g \sin \alpha}{2a(\alpha - \cos \alpha \sin \alpha)} \cdot \frac{12g}{29a}$$

producing the (transcendental) equation

$$\alpha - \cos \alpha \sin \alpha \approx 1.61 \sin \alpha$$

Since 1.61 is not far from 1.57 we have proved that a physically acceptable solution is  $\alpha \approx \pi/2$ , which has been shown. Setting  $\alpha = \pi/2$  hereafter, to simplify the algebra,  $\omega_z^2 = 3g/\pi a$  and  $4d/\rho = 1$  to a good approximation. Since the vertical period is 1 sec,

$$1 = (2\pi/\omega_z)^2 = 4\pi^3 a/3g, \text{ giving a radius}$$

$$a = 9.8/1.33\pi^2 = 0.237 \text{ m.}$$

We can now work out the mass of the buoy,

$$2M = 2\pi a^2 l d = 2\pi a^2 \cdot a \cdot \rho/4 = \pi a^3 \rho/2 = \pi \cdot 500 \cdot (.237)^3 \approx 20.9 \text{ kg.}$$

## Experiment 2

### Streuung und Beugung von Laserlicht

Dieses Experiment hat die Demonstration bzw. Messung der Reflexion, Beugung und Streuung des von einer Laser-Diode emittierten (sichtbaren) Lichtes zum Ziel. Ein Metall-Lineal wird als Beugungsgitter verwendet. Ein Plexiglasgefäß, das mit Wasser und etwas Milch

gefüllt ist, wird zur Bestimmung der Reflexions- und Streuungsphänomene verwendet.

#### Teil 1 (8 Punkte)

Das vertikal montierte, 150 mm lange Metall-Lineal soll von dem horizontalen Laserstrahl so getroffen werden, daß mehrere Markierungslinien beleuchtet werden. Es soll mit dem polierten Teil des Metall-Lineals gearbeitet werden. Auf dem weißen Papierschirm sind dann mehrere, durch die Beugung erzeugte Lichtpunkte zu sehen.

Die Lage dieser Punkte und ihr Abstand voneinander sollen auf einem etwa 1,5 m entfernten Schirm gemessen werden. Es ist eine Skizze des experimentellen Aufbaues anzufertigen, aus der die Geometrie der Anordnung hervorgeht.

Mit Hilfe der Beziehung:  $N \cdot \lambda = \pm h \cdot \sin \beta$

- N*.....Ordnung der Beugung
- $\lambda$ .....Wellenlänge des Lichtes
- h*.....Gitterkonstante
- $\beta$ .....Beugungswinkel

und den Meßergebnissen soll die Wellenlänge des Laserlichtes bestimmt werden. Die Genauigkeit des Wertes ist abzuschätzen.

#### Teil 2 (2 Punkte)

Stelle das leere Plexiglasgefäß zwischen den Laser und den weißen Papierschirm. Das Gefäß soll möglichst senkrecht zum Laserstrahl stehen.

(I)

Beobachte die Abnahme der Intensität des Strahles und schätze den Prozentsatz dieser Abnahme ab. Berücksichtige dabei, daß das menschliche Auge eine logarithmische Empfindlichkeit hat. Mehrere kalibrierte (geeichte) Transmissionsfilter sind vorhanden, um dir hierbei zu helfen. Die Abnahme der Intensität wird in erster Linie durch die Reflexionsverluste an der Luft/Plexiglasoberfläche, von denen es in diesem Falle vier gibt, verursacht. Der Reflexionskoeffizient *R* für senkrechten Einfall auf eine Oberfläche ist das Verhältnis zwischen der reflektierten und der einfallenden Intensität und ist gegeben durch

$$R = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

Hierbei sind  $n_1$  und  $n_2$  die Brechzahlen vor und hinter der Oberfläche. Der entsprechende Transmissionskoeffizient (unter Vernachlässigung der Absorption im Plexiglas) ist gegeben durch:

$$T = 1 - R$$

(II)

Bestimme den Intensitätstransmissionskoeffizienten des leeren Plexiglasgefäßes experimentell. Die Brechzahl von Plexiglas ist 1,59. Effekte auf Grund von Vielfachreflexionen und Kohärenz sind zu vernachlässigen. Vergleiche dieses Ergebnis mit der in (I) durchgeführten Abschätzung!

#### Teil 3 (1 Punkt)

Fülle 50 ml Wasser in das Plexiglasgefäß, ohne es zu bewegen und wiederhole dann die Berechnungen und Beobachtungen aus Teil 2.

Die Brechzahl von Wasser ist 1,33.

#### Teil 4 (9 Punkte)

(I) Zu den 50 ml Wasser im Gefäß sollen 0,5 ml (= 12 Tropfen) Milch als Streumaterial hinzugegeben werden. Gut umrühren!

Miß so genau wie möglich den Gesamtwinkel unter dem das Laserlicht gestreut wird und den Durchmesser des Lichtfleckes an der Austrittsoberfläche des Gefäßes. (Beide Größen hängen natürlich voneinander ab!)

Bestimme außerdem (wie in den vorangegangenen Aufgabenteilen) die Abnahme der Intensitätstransmission!

(II) Füge nochmals 0,5 ml Milch hinzu und wiederhole die Messungen von (I).

(III) Verfahre wie in (II) solange, bis hinter dem Gefäß fast kein Licht mehr beobachtet werden kann.

(IV) Bestimme die Beziehung zwischen dem Streuwinkel und der Milchkonzentration.

(V) Verwende Deine Ergebnisse und die Beziehung  $I = I_0 \cdot e^{-\mu z} = T_{\text{Milch}} \cdot I_0$  zur Abschätzung des Wertes von  $m$  bei einer Milchkonzentration von 10%.

- $I_0$  .....Eingangsintensität
- $I$  .....Austrittsintensität
- $z$  .....Abstand der Gefäßwände
- $m$  .....Absorptionskoeffizient (Produkt aus Konzentration und einer Konstanten)
- $T_{\text{Milch}}$  .....Transmissionskoeffizient von Milch

**Geräte**

Du mußt nicht alle Geräte verwenden!

Laserdiode, Metall-Lineal als Reflexionsgitter, Plexiglasgefäß für Wasser bzw. Wasser-Milch-Gemisch, Bandmaß, weißer Papierschirm, Zerstreuungslinse, Sammellinse, Winkelmesser, Transmissionsfilter, Becher und Tropfpipette, Rührer, Linear-linear und logarithmisch-lineares Papier

**Detailed Model Answer and Marking Sceme to Experiment 2**

**Section 1**

- (i) A typical geometrical layout is as shown below.
  - (a) Maximum distance from ruler to screen is advised to increase the spread of the diffraction pattern.
  - (b) Note that the grating (ruler) lines are horizontal, so that diffraction is in the vertical direction.
- (ii) Vis a vis the diffraction phenomenon  $\alpha = 0$ ,  $\beta = (y/1400)$   $\beta$  measured using either a protractor (not recommended) or by measuring the value of  $y$  for a given order  $N$ .  
If the separation between 20 orders is measured, then  $N = \pm 10$  ( $N = 0$  is central zero order).  
The values of  $y$  should be tabulated for  $N = 10$ . If students choose other orders, this is O.K. also.

$N$	$\pm 10$	$\pm 10$	$\pm 10$	$\pm 10$	$\pm 10$	$\pm 10$	$\pm 10$	$\pm 10$	$\pm 10$	$\pm 10$
2y/mm	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
y/mm	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Mean value =  $(19.25 \pm 1.25)$  mm  
 i.e Mean "spot" distance = 19.25 mm for order  $N = 10$ .  
 From the observation of the ruler itself,  $h = 0.5 \text{ mm} \pm 0.02 \text{ mm}$ .  
 Thus in the relation  $N\lambda = h (\sin \alpha - \sin \beta)$   
 $N = 10$ ,  $h = 0.5 \text{ mm}$ ,  $\alpha = \sin \alpha = 0$ ,  $\sin \beta = y/1400 = 0.01375$

Since  $\beta$  is small  $\frac{\delta \lambda}{\lambda} = \frac{\delta l}{l} + \frac{\delta y}{y} = 10\%$   
 $10\lambda = 0.006875 \text{ mm}; \quad \lambda = 0.0006875 \text{ mm}$   
 i.e measured  $\lambda = 690 \pm 70 \text{ nm}$   
 (The correct value is 680 nm.)

Departure from accepted value = 1.5%.

If the students are within 10% of the correct value, no marks should be deducted. If within 20%, deduct 1 mark. If within 30%, deduct 2 marks. [8 marks]

**Section 2**

(i) Using the  $T = 50\%$  transmission disk, students should not think that the transmission through the tank is great than this value, using a linear approximation. 75% transmission could well be estimated. Using the hint about the eye's logarithmic response, the transmission through the tank could be estimated as high as 85%.

Any figure for transmission between 75% and 85% is acceptable.

(ii) Calculation of the transmission through the tank, using

$$T = 1 - R = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

for each of the four surfaces of the tank, and assuming  $n = 1.59$  for the perspex, results in a total transmission.  $T_{\text{total}} = 80.80\%$  [2 marks]

**Section 3**

(iii) With water in the tank, surfaces 2 and 3 become perspex/water interfaces instead of perspex/air interfaces as in (ii). The resultant values is  $T_{\text{total}} = 88.5\%$  [1 mark]

**Section 4**

Possible configuration for sections 2, 3, 4

With pure water in the tank only, we see from Section 3 that the transmission  $T$  is  $T_{\text{Water}} = 88\%$ .

The aim here is to determine the beam divergence (scatter) and transmission as a function of milk concentration.

The following is an example of the calculation expected:

With 0.5 ml milk added to the 50 ml water, we find  
 Scatter Concentration =  $(0.5/50) = 1\% = 0.01$   
 $2x' = 2.2 \text{ mm} \quad 2\theta' = 2x'/30 = 0.073$   
 $T_{\text{milk}} = 0.7/0.88 = 0.79$

(iii) Note that  $T_{\text{milk}} = T_{\text{total}}/T_{\text{water}}$  and  $T_{\text{water}} = 0.88 - (1)$ .

If students miss the relationship (1), deduct 1 mark.

One thus obtains the following table of results.  $2\theta'$  can be determined as shown above, or by looking down onto the tank and using protractor to measure the value of  $2\theta'$ . It is important to note that even in the presence of scattering, there is still a direct beam being transmitted. It is much stronger than the scattered radiation intensity, and some skill will be required in measuring the scattering angle  $2\theta'$  using either method.

(iv) From the graphed results, one obtains an approximately linear relationship between milk concentration  $C$ , and scattering angle  $2\theta'$  ( $= \phi$ ):  $\phi = 6 C$ , where  $C$  is the percentage concentration,  $\phi$  is total scattering angle ( $= 2\theta'$ )

(v) Assuming the given relation  $I = I_0 e^{-\mu z} = T_{\text{milk}} \cdot I_0$  where  $z$  is the distance into tank containing milk/water. We have  $T_{\text{milk}} = e^{-\mu z}$ . Thus  $\ln T_{\text{milk}} = -\mu z$ , and  $\mu = \text{constant} \cdot C$ .

An approximately linear relationship can be obtained between  $\ln T_{\text{milk}}$  and  $C$ , the concentration viz.

$$\ln T_{\text{milk}} = -0.4 C = -\mu z$$

Thus we can write  $T_{\text{milk}} = e^{-0.4 C} = e^{-\mu z}$

For the tank used,  $z = 25 \text{ mm}$  and thus  $0.4 C = 25\mu$  or  $\mu = 0.016 C$

By extrapolation of the graph of  $\ln T_{\text{milk}}$  versus concentration  $C$ , one finds that for a scatter concentration of 10%  $\mu = 0.160 \text{ l/mm}$

[8 marks]