Freihandexperiment – Videoanalyse – Simulation

Slinky will nicht fallen

Helmuth Mayr und Helmut Kühnelt

Am 28.1.1947 erhielt Mr. James ein US-Patent auf ein bis heute populäres und faszinierendes Spielzeug: *Slinky*, die weiche Schraubenfeder, die Treppen und Rampen hinuntersteigt. Weniger bekannt ist die Fähigkeit der 50-jährigen, im freien Fall teilweise und kurzfristig der Schwerkraft zu trotzen.

Glauben Sie dies nicht?

Freihandexperiment

Fassen Sie mit einer Hand Ihre Slinky – um wenig Geld ist sie in guten Spielwarengeschäften erhältlich – am einen Ende und lassen sie senkrecht nach unten hängen. Knapp unter das frei hängende untere Ende halten Sie Ihre andere Hand. Lassen Sie Slinky nun in Ihre Hand fallen. Was beobachten Sie? Wenn Ihnen nichts merkwürdig vorkommt, wiederholen Sie das Experiment mehrmals, anschließend auch mit einem Stab.

Zur besseren Beobachtung lohnt es sich, Slinky an einem Faden – am besten bifilar – aufzuhängen und zunächst ihre verschieden starke Dehnung zu beachten. Eventuell könnte man das Dehnungsgesetz durch Nachmessen an der hängenden Feder und graphische Darstellung untersuchen (lassen) und anschließend die Schüler nach einer Erklärung suchen lassen. (Bei einer neuen Slinky werden im Hängen etwa die letzten fünf Windungen nicht gedehnt sein. Slinky hat eine Vorspannung, die sie im entspannten Zustand auf die kürzest mögliche Länge zusammenziehen möchte.)

Anschließend nehmen Sie ein Streichholz und brennen Sie (oder ein Helfer) den Aufhängefaden durch. Beobachten Sie genau Slinkys Fallbewegung. Wie vergleicht sich Ihre Beobachtung mit dem vorangegangenen "Handexperiment"? Schlägt nicht wenigstens ein Teil von Slinky der Schwerkraft ein Schnippchen?

Videoanalyse

Da der Vorgang trotz seiner offensichtlichen Verzögerung doch nur kurz (etwa 1/3 s) dauert, hilft eine Videoaufnahme (bei guter Beleuchtung mit Kurzzeitbelichtung). Sie erhalten etwa 8 Bilder, die den Vorgang in gleichen Zeitabständen von 1/25 Sekunden zeigen. Steht Ihnen zur Wiedergabe ein Videorekorder mit "Jog-shuttle"-Funktion (Einzelbildwiedergabe) zur Verfügung, können Sie am Videoschirm die Fallbewegung in Zeitlupe qualitativ und anschließend quantitativ studieren. Sie sehen nun viel deutlicher, was Sie zuvor gefühlt haben: Das untere Ende der Slinky bleibt relativ lange schweben, obwohl der Haltefaden durchgebrannt wurde. Was macht das obere Ende?

Die Betrachtung der Einzelbilder am Bildschirm bestätigt den Eindruck vom Freihandexperiment: Das obere Ende setzt sich mit großer Beschleunigung in Bewegung und sammelt beim Fallen immer mehr Windungen der darunterhängenden restlichen Feder auf, wodurch ein immer größer werdender, ziemlich kompakt erscheinender "Block" ohne beobachtbare innere Schwingung dem unteren Ende entgegenfällt, das erst dann zu fallen beginnt, wenn es von dieser Kontraktion erreicht wird.

Zur *quantitativen* Auswertung der Videoaufnahme haben wir eine OH-Folie an den TV-Schirm anlegt und markante Punkte der Einzelbilder in eine "Stroboskop-Aufnahme" übertragen. (Die Genauigkeit dieser Methode ist wegen der Dicke des Frontglases der TV-Röhre gering.) Für das Fortschreiten der Front fanden wir nach jeweils 1/25 s, wobei das erste Bild wegen der unsicheren Startzeit unberücksichtigt blieb, folgende Geschwindigkeiten in ms^{-1}: 5,0; 5,0; 4,9; 4,6; 4,4; 4,3; 3,6.

Die bereits nach etwa 1/25 s erreichte Geschwindigkeit von 5 ms^{-1} entspricht einer Beschleunigung von über 12g. Interessanterweise bleibt diese Frontgeschwindigkeit zunächst konstant, um dann abzunehmen. Nach 0,28 s hat die Front eine Strecke von 127 cm durchfallen. Die über diesen Zeitraum gemittelte Beschleunigung beträgt etwa 3g. (Da das obere Ende der Feder den Abschluß des fallenden Blocks aus Slinky-Windungen bildet, gelten auch dafür praktisch die gleichen Werte.)

Modifikation: Läßt man gleichzeitig eine Meßlatte gleicher Länge wie die gedehnte Slinky fallen, so kann man leicht und eindrucksvoll für verschiedene Teile der Feder die Geschwindigkeiten relativ zum freien Fall eines starren Körpers sehen und vergleichen.

Haben Sie schon eine Erklärung für Slinkys paradoxes Verhalten?

Einfaches Modell der Schraubenfeder

Zum besseren Verständnis des Verhaltens der Schraubenfeder ersetzen wir sie in Gedanken durch eine Reihe von n gleichen Massestücken (Masse m), die untereinander durch masselose Federn (Federkonstante k, ungedehnte Länge Null) elastisch gekoppelt sind (Abb. 1).

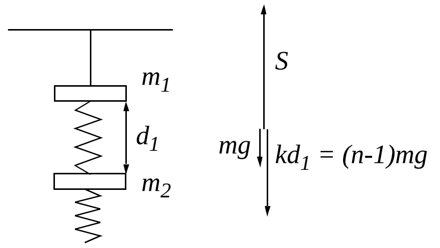

Abb.1: Modell aus Massen und Federn. Gleichgewicht der Kräfte, die an m_1 angreifen.

a) Hängende Feder

Die auf die einzelnen Massenstücke wirkenden Kräfte ergeben sich gemäß der Abbildung (Abb. 1): Auf Massestück 1 wirkt nach oben die Fadenkraft *S*, nach unten wirkt ihr Gewicht und über die elastische Kopplung das Gewicht der restlichen (*n-1*) Massestücke. Auf Massestück 2 wirkt nach oben die elastische Kraft der gedehnten Feder, nach unten das eigene Gewicht und das über die Feder übertragene Gewicht der restlichen (*n-2*) Massestücke, u.s.w. Alle Massen befinden sich im Kräftegleichgewicht und in Ruhe. Mit g als Erdbeschleunigung, d_i als Abstand der Massen m_i und m_{i+1} lassen sich die resultierenden Kräfte anschreiben:

$$
\begin{aligned}
F_1 &= -mg - kd_1 + S = 0\\
F_2 &= -mg - kd_2 + kd_1 = 0\\
&\dots\\
F_{n-1} &= -mg - kd_{n-2} + kd_{n-1} = 0\\
F_n &= -mg - kd_{n-1} = 0
\end{aligned}
$$

Addition sämtlicher Gleichungen liefert sofort: $S = n\,mg$, daher $d_1 = (n-1)mg/k$, $d_2 = (n-2)mg/k$, usw. Die Zunahme der Ganghöhen ist damit verständlich. (Allerdings werden auch Sie bei Ihrer eigenen Feder finden, daß die letzten Windungen nicht gedehnt sind: Gute Slinkys haben eine Vorspannung!)

b) Die Feder beginnt zu fallen.

Das Bewegungsverhalten können wir zumindest ansatzweise aus den obigen Gleichungen ablesen, indem wir die Grundgleichung der Mechanik, das 2. Newtonsche Gesetz, verwenden: $m\,a_i = F_i$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ schneiden wir die Aufhängung durch ($S = 0$):

$$
\begin{aligned}
ma_1 &= -mg - kd_1\\
ma_2 &= -mg - kd_2 + kd_1\\
&\dots
\end{aligned}
$$

Beschleunigung a_i und Abstand d_i werden nun zeitabhängig. Bei $t = 0$ wirkt auf Masse 1 eine Kraft, die das n-fache ihres Gewichts ist, während Masse 2 sich bei $t = 0$ noch im Kräftegleichgewicht befindet und sich unter dem entstehenden Kräfteungleichgewicht (wegen $d_1 \to 0$) langsam in Bewegung setzt. Wenn nun Masse 1 die praktisch noch ruhende Masse 2 erreicht, ist zweierlei zu beachten: wegen $d_1 = 0$ wirkt nun auf Masse 2 neben dem eigenen Gewicht jenes der daranhängenden (*n-2*) Massestücke, was wieder zu einer großen Beschleunigung (*n-1*)*g* führt. Da weder in der realen Schraubenfeder, noch in unserem Modell ein Überholen möglich ist, erfolgt stattdessen ein Stoß gleicher Massen, den wir idealisiert entweder als elastisch oder als total unelastisch annehmen wollen.

Elastischer Stoß: Dadurch tauschen die Massen ihre Geschwindigkeiten aus. Masse 2 beginnt ihre Abwärtsbewegung mit der Endgeschwindigkeit von Masse 1 und wird weiter beschleunigt. (Sie wird nur wenig gebremst, da Masse 1 wieder zurückbleibt.)

Unelastischer Stoß: Trifft die erste Masse auf die zweite, bilden sie einen Block der doppelten Masse. Die Anfangsgeschwindigkeit des neugebildeten Blocks ist wegen der Addition der Impulse (Impulserhaltung gilt weiterhin!) der Mittelwert der Geschwindigkeiten vor dem Stoß. Die Zunahme der Masse muß bei der Bestimmung der Beschleunigung für den weiteren Vorgang berücksichtigt werden.

Im wesentlichen ergibt sich in beiden Fällen: Die Entspannung der Feder läuft wie eine Schockwelle durch die Feder und erst wenn die Welle bei dem letzten Massestück angekommen ist, beginnt auch dieses zu fallen. Elastischer und unelastischer Fall werden sich geringfügig unterscheiden.

Steht dies nicht in Widerspruch zu Galileis Aussage "Alle Körper fallen gleich schnell"?

Addieren wir alle Bewegungsgleichungen, dann sehen wir, daß die mittlere Beschleunigung $(a_1 + a_2 + \dots)/n$ der gesamten Feder stets g beträgt. Wir haben es nicht mit einem starren Körper zu tun, sondern mit einem Körper mit inneren Freiheitsgraden und inneren Kräften. Daher können Teile des Körpers mit hoher Beschleunigung und andere geringer beschleunigt werden. Die Gesetze des freien Falls sind nur auf den Schwerpunkt der Anordnung anzuwenden.

Numerische Simulation

Eine numerische Lösung der Bewegungsgleichungen in einem EXCEL-Arbeitsblatt ist in der Oberstufe möglich und zeigt die Vorteile des Computereinsatzes zum Verständnis des Vorgangs, der wie mit einem Stroboskop betrachtet werden kann. Ausgehend von den durch den statischen Fall bestimmten Anfangswerten für d_i haben wir die Bewegungsgleichung für 6 Massen "integriert", indem wir näherungsweise während der einzelnen Zeitschritte Δt die Beschleunigung als konstant angenommen haben. (Die Zahl der Massen kann beliebig gewählt werden.) Nach j Schritten berechnen wir für jede einzelne Masse i den Ort x_i, die Geschwindigkeit v_i und die Beschleunigung a_i

$$
\begin{aligned}
t &= j\,\Delta t\\
v_i(t) &= v_i(t-\Delta t) + a_i(t-\Delta t)\,\Delta t\\
x_i(t) &= x_i(t-\Delta t) + v_i(t-\Delta t)\Delta t + a_i(t-\Delta t)\,\Delta t^2/2\\
a_i(t) &= -g - k\,((x_i(t) - x_{i+1}(t)) - (x_{i-1}(t) - x_i(t)))/m
\end{aligned}
$$

Als Startwerte sind $v_i(0) = 0$, $x_i(0) = x_{i-1}(0) - (n-i)mg/k$ für $i = 1,\dots n$ zu wählen und der Ort der obersten Masse $x_1(0)$ ist frei wählbar. Mit der Wahl $k = 125$ N/m, $m = 0{,}02$ kg, $g = 10$ ms^{-2} und $n = 6$ erhält man eine realistische Simulation der Feder. Mit einer zeitlichen Schrittweite von z.B. $\Delta t = 0{,}002$ s wurden die Bewegungsgleichungen numerisch gelöst.

Neben den Bahnen der einzelnen Massen ist leicht auch die Bahn des Schwerpunkts $x_s = (x_1 + x_2 + \dots)/n$ mit zu verfolgen. Die graphische Darstellung gibt mehr Einblick als die Zahlenkolonnen. (Unter den Darstellungsmöglichkeiten sei für den Genießer besonders die Relativbewegung zum Schwerpunkt genannt und auf die Analogie zu den Schwingungsmöglichkeiten gestreckter vielatomiger Moleküle verwiesen. Man sieht, daß zunächst eine einzelne Masse gegen die restlichen schwingt, dann zwei gemeinsam gegen (*n-2*), etc.)

Elastischer Stoß: Eine kleine Komplikation ergibt sich dadurch, daß "Überholen" ausgeschlossen sein soll und in solchen Fällen die Geschwindigkeiten der entsprechenden Massen entsprechend einem elastischen Stoß vertauscht werden müssen. Die logische EXCEL-Funktion WENN(...) ermöglicht dies. Das Weg-Zeit-Diagramm der einzelnen Massen und des Schwerpunkts zeigt Abb. 2. Die Massen setzen sich nacheinander in Bewegung, durch die elastischen Stöße kommt es zu inneren Schwingungen. Die Frontgeschwindigkeit nimmt zu, da die einzelnen Massestücke von ihren Stoßpartnern viel Impuls übertragen bekommen und jeweils eine einzelne Masse durch das Gewicht der darunter hängenden Massen beschleunigt wird. Nach etwa 0,14 s trifft die oberste Masse m_1 auf die nächste, die erst langsam fällt, überträgt ihre Geschwindigkeit und wird selbst abrupt langsamer. Die einzelnen Massen durchfallen immer kürzere Distanzen, und nach 0,25 s setzt sich die unterste in Bewegung, während der Schwerpunkt die Anfangshöhe der letzten Masse (1,00 m) nach 0,3 s erreicht.

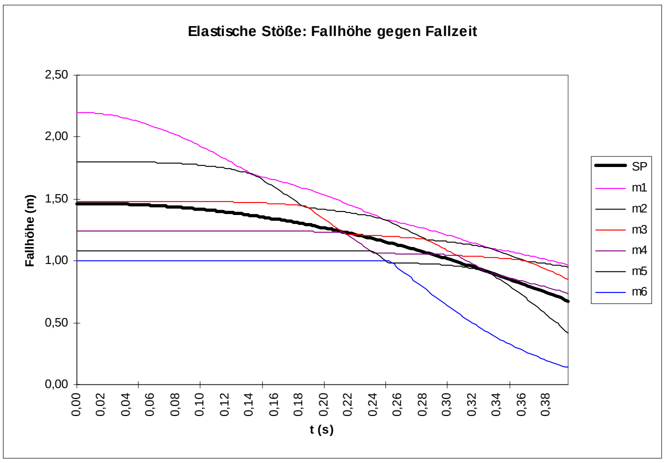

Abb.2: Weg-Zeit-Diagramm der einzelnen Massen und des Schwerpunkts SP. Elastische Stöße verursachen innere Schwingungen.

Unelastischer Stoß: Dieser ist etwas mühsamer zu behandeln, da bei jedem Stoß sich die Masse des Blocks ändert, und die bereits "eingesammelten" Massen nicht mehr unabhängigen Bewegungsgleichungen gehorchen. Es wurde daher mit einer festen Schrittweite gerechnet. Bei Eintreten eines Stoßes wurden im Rechenblatt sowohl die Geschwindigkeiten gemäß dem unelastischen Stoß korrigiert als auch die Masse im Ausdruck für die Beschleunigung. Das Ergebnis zeigt Abb. 3. Man sieht, wie die Geschwindigkeit des fallenden Blocks mit zunehmender Masse abnimmt und schließlich der Fallgeschwindigkeit des Schwerpunkts entspricht.

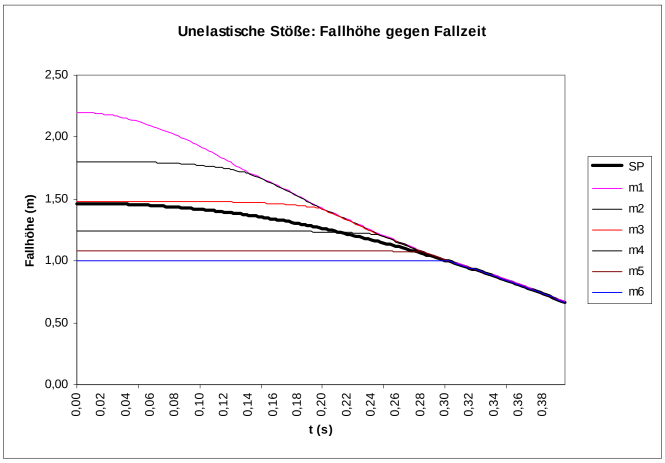

Abb 3: Weg-Zeit-Diagramm der einzelnen Massen und des Schwerpunkts SP. Unelastische Stöße bremsen den fallenden Block.

Der Vergleich mit der Videoaufnahme ergibt also, daß die Simulation mit unelastischen Stößen das Verhalten von Slinky besser wiedergibt. Das einfache Modell aus Masse- und Federstücken benötigte eine Zusatzannahme (Was geschieht bei der Kollision der Windungen?), um neben groben Zügen die feineren Einzelheiten gut wiederzugeben!

Lange Leitung?

Wie lange dauert es, bis Slinkys unteres Ende erfährt, daß es fallen darf? Es muß, wie wir sowohl aus der Videoanalyse als auch aus den Überlegungen zu den wirkenden Kräften gesehen haben, die nach oben wirkende Federspannung abgebaut werden. Dies erfolgt, wenn die wie eine Schockwelle durch die Feder laufende Kontraktion der Feder das untere Ende erreicht. Die Zeit, die dafür benötigt wird, entspricht praktisch der Fallzeit des Schwerpunkts, der sich anfangs wegen der Massenverteilung der hängenden Feder in einer Höhe von 1/3 Länge der gedehnten Feder über dem unteren Ende befindet (für unsere Feder also etwa 50 cm). Der Schwerpunkt braucht daher etwa 0,3 s, bis er das untere Ende erreicht – solange bleibt das untere Ende von Slinky schweben.

Abschlußbemerkung: Die Information, daß die Aufhängung durchgetrennt wurde, breitet sich entlang der Feder nur mit der Geschwindigkeit von elastischen Wellen $c = (k/\rho)^{1/2}$ aus: je weicher die Feder, desto länger dauert die Informationsweitergabe, desto länger schwebt das untere Ende. (Außerdem: Je weicher die Feder, desto größer ist die Dehnng der Feder, desto weiter muß der Schwerpunkt fallen.) Die Signalübertragung durch die Kontraktionswelle ist evident und daher schließlich auch das "Schweben" von Slinky verständlich.

Wenn Ihre Schüler Ihnen bis hieher gefolgt sind – und vielleicht selbst die Lösung des paradoxen Verhaltens von Slinky gefunden haben, dann stellen Sie ihnen einmal die Frage, wie lange der Mond brauchen würde um zu merken, wenn ihm die Erde durch einen Zauberer "gestohlen" worden wäre. Wie könnte seine Bahn danach aussehen?

Literaturhinweis: Prof. Bürger vergleicht in seinem vergnüglich zu lesenden Buch *Der paradoxe Eierkocher* (Birkhäuser 1995) den freien Fall einer Slinky und einer Kette. Unter Vernachlässigung möglicher innerer Schwingungen leitet er eine Differentialgleichung für die Fallbewegung und das Fortschreiten der Wellenfront ab, die elementar lösbar ist. Das Ergebnis für die Dauer des Vorgangs entspricht unserem.