

# Beispiele der 26. Internationalen Physikolympiade – Teil I

## Beispiel 1 Rotverschiebung aufgrund der Gravitation und Messung der Masse eines Sterns

### (a) (3 Punkte)

Ein Photon der Frequenz  $f$  besitzt eine effektive Masse  $m$ , die durch die Energie bestimmt wird. Wir nehmen an, daß seine schwere Masse seiner Ruhemasse entspricht. Dementsprechend wird ein Photon, das von der Oberfläche eines Sterns emittiert wird, Energie verlieren, wenn es im Gravitationsfeld des Sterns aufsteigt. Weisse nach, daß die Frequenzverschiebung eines Photons, das von der Oberfläche des Sterns ins Unendliche fliegt, beschrieben wird durch:

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{GM}{Rc^2} \quad \text{mit} \quad \frac{\Delta f}{f} \ll 1$$

Mit:  $G$  ... Gravitationskonstante  
 $R$  ... Radius des Sterns  
 $c$  ... Lichtgeschwindigkeit  
 $M$  ... Masse des Sterns

Aus diesem Grund kann die Rotverschiebung einer bekannten Spektrallinie (gemessen in großer Entfernung vom Stern) benutzt werden, um das Verhältnis  $M/R$  zu bestimmen. Wenn  $R$  bekannt ist, kann die Masse des Sterns bestimmt werden.

### (b) (12 Punkte)

Ein unbemanntes Raumschiff soll mit diesem Verfahren die Masse  $M$  eines Sterns unserer Galaxie und seinen Radius  $R$  messen. An der Sternoberfläche werden von  $\text{He}^+$ -Ionen Photonen emittiert. Diese werden, beim radialen Anflug auf den Stern, durch Resonanzabsorption in einer  $\text{He}^+$ -Ionenkammer im Raumschiff nachgewiesen. Die Absorption ist nur möglich, falls sich die Ionen mit einer Geschwindigkeit auf den Stern hin bewegen, welche die Effekte der Rotverschiebung kompensiert. Die Geschwindigkeit  $v = \beta \cdot c$  der  $\text{He}^+$ -Ionen wird in Abhängigkeit des Abstandes  $d$  von der Sternoberfläche gemessen. Die Meßwerte sind in der unten stehenden Tabelle aufgelistet. Benutze alle Daten, um die Masse  $M$  und den Radius  $R$  des Sterns grafisch daraus zu bestimmen. Es sind keine Fehlerbetrachtungen für die Lösung zu machen.

#### Meßwerte für die Resonanzbedingung

Geschwindigkeitsverhältnis $\beta = v/c$	3.352	3.279	3.195	3.077	2.955
Abstand von Oberfläche $d$ ( $10^8$ m)	38.90	19.98	13.32	8.99	6.67

### (c)

Bei einem solchen Experiment macht man für die Bestimmung von  $R$  und  $M$ , wegen des Rückstoßes der emittierenden Atome, üblicherweise eine Frequenzkorrektur. (Durch die thermische Bewegung entsteht eine Verbreiterung der Emissionslinien, die jedoch das Maximum der Verteilung nicht beeinflusst. Wir nehmen deshalb an, die thermischen Effekte seien bereits berücksichtigt.)

### (i) (4 Punkte)

$\Delta E$  ist die Energiedifferenz der Niveaus bei ruhendem Atom. Nimm an, das Atom ruht, wenn es in den Grundzustand zurückkehrt. Dabei sendet es ein Photon aus und erfährt einen Rückstoß. Leite den relativistischen Ausdruck für die Energie  $hf$  des Photons als Funktion von  $\Delta E$  und der Ruhemasse  $m_0$  des Atoms her.

### (ii) (1 Punkt)

Schätze damit die relativistische Frequenzverschiebung  $(\Delta f/f)_{\text{Rückstoß}}$  für  $\text{He}^+$ -Ionen ab. Das Ergebnis sollte wesentlich kleiner als das Ergebnis von (b) sein.

#### Daten

Lichtgeschwindigkeit  $c = 3,0 \cdot 10^8$  m/s  
 Ruhemasse von He  $m_0 c^2 = 4,938$  MeV  
 Bohrsche Energie  $E_n = -13,6 \cdot Z^2 / n^2$  eV  
 Gravitationskonstante  $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>

## Solution to Question 1

### (a)

A photon has an effective inertial mass  $m \rightarrow$

$$m c^2 = hf \rightarrow m = hf/c^2. \quad [1 \text{ mark}]$$

Assume: gravitational mass = inertial mass, consider a photon of energy  $hf$  (mass  $m = hf/c^2$ ) emitted upwards at a distance  $r$  from centre of star. It will lose energy on escape:

Conservation of energy:

change in photon energy ( $hf_i - hf_f$ ) = change in gravitational energy [subscript i ... initial, f ... final]

$$hf_i - hf_f = -\frac{GMm_f}{\infty} - \left[ -\frac{GMm_i}{r} \right], \quad hf_f = hf_i - \frac{GMm_i}{r}$$

Since change in photon energy is small ( $\Delta f \ll f$ )

$$m_f \cong m_i = \frac{hf_i}{c^2}, \quad hf_f \cong hf_i - \frac{GM \frac{hf_i}{c^2}}{r} \cong hf_i \left[ 1 - \frac{GM}{rc^2} \right],$$

$$\frac{f_f}{f_i} = \left( 1 - \frac{GM}{rc^2} \right), \quad \frac{\Delta f}{f} = \frac{f_f - f_i}{f_i} \cong -\frac{GM}{rc^2}$$

negative sign shows red-shift  $\rightarrow$  decrease in  $f$ , increase in  $\lambda$ .

For a photon emitted from surface of star of radius  $R$ , we have

$$\frac{\Delta f}{f} \cong -\frac{GM}{rc^2} \quad [2 \text{ marks}]$$

### (b)

Change in photon energy in ascending from  $r_i$  to  $r_f$  is

$$hf_f - hf_i = -\frac{GMm_f}{r_f} + \frac{GMm_i}{r_i} \cong \frac{GM(hf_i)}{c^2} \left[ \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} \right] \quad [3 \text{ marks}]$$

assuming  $m_f \cong m_i = hf/c^2$

$$\frac{f_f}{f_i} = 1 - \frac{GM}{c^2} \left[ \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} \right]$$

In the experiment,  $R$  = radius of star,  $d$  = distance from surface of star above equation becomes

$$\frac{f_f}{f_i} = 1 - \frac{GM}{c^2} \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right] \quad (1)$$

The frequency of the photon must be Doppler shifted back from  $f_f$  to  $f_i$  in order to cause resonance excitation of the  $\text{He}^+$  ions in the spacecraft  $\rightarrow$

$$\frac{f_f}{f_i} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad (\text{Relativistic Doppler})$$

$$\frac{f_f}{f_i} = (1-\beta)^{1/2}(1+\beta)^{-1/2} \cong 1-\beta \quad \text{since } \beta \gg 1$$

or use classical Doppler directly  $\rightarrow \frac{f_f}{f_i} = 1-\beta$  (2)

(2) into (1)  $\rightarrow$

$$\beta = \frac{GM}{c^2} \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right] \quad (3) \quad [3 \text{ marks}]$$

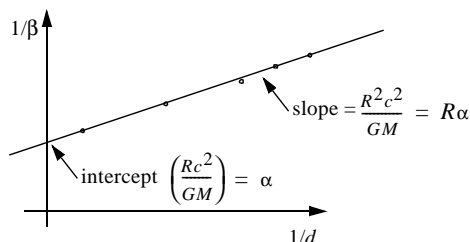
Given the experimental data, we look for an effective graphical solution. Rewrite (3):

$$\beta = \frac{GM}{c^2} \left[ \frac{R+d-R}{(R+d)R} \right] \quad [2 \text{ marks}]$$

Inverting equation:

$$\frac{1}{\beta} = \left( \frac{Rc^2}{GM} \right) \left[ \frac{R}{d} + 1 \right]$$

Plot of  $1/\beta$  versus  $1/d$



$$\text{slope} \Rightarrow \left( \frac{Rc^2}{GM} \right) R = \alpha R \quad (A)$$

$$1/\beta - \text{intercept} \Rightarrow \left( \frac{Rc^2}{GM} \right) = \alpha \quad (B)$$

$$1/d - \text{intercept} \Rightarrow -\frac{1}{R} \quad (C)$$

$R$  and  $M$  can be conveniently determined from (A) and (B) [with eqn (C) redundant  $\rightarrow$  use as 'check' if needed  $\rightarrow$  not accurate].

From given data:  $R = 1.11 \cdot 10^8 \text{ m}$ ,  $M = 5.2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

$$\text{From graph, slope} \rightarrow \alpha R = 3.2 \cdot 10^{12} \text{ m} \quad (A)$$

$$1/\beta - \text{intercept} \rightarrow \alpha = \frac{Rc^2}{GM} = 0,29 \cdot 10^5 \quad (B)$$

$$\frac{(A)}{(B)} \rightarrow R = \frac{3,2 \cdot 10^{12} \text{ m}}{0,29 \cdot 10^5} \cong 1,104 \cdot 10^8 \text{ m}$$

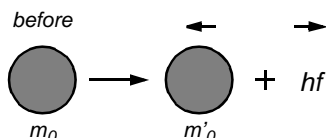
Back into (B)  $\rightarrow$

$$M = \frac{Rc^2}{G\alpha} = \frac{1,104 \cdot 10^8 \cdot (3,0 \cdot 10^8)^2}{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 0,29 \cdot 10^5}$$

or  $m = 5,11 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

[Recognition of straight line  $1/\beta$  versus  $1/d$  with correct algebraic slope and intercept: 3 marks, reasonable numerical solutions for  $M$  and  $R$ : 1 mark]

(c) (i)



photon momentum  $p = hf/c$ , photon energy  $E = hf$

$$\text{Relativistic E-p relation: } E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad [1 \text{ mark}]$$

Mass-energy equivalence  $\rightarrow$

$$\text{Internal energy change of atom} = \text{rest-mass energy change} \\ \Delta E = (m_0 - m'_0) c^2 \quad [1 \text{ mark}]$$

In laboratory frame:

$$\text{Energy before emission} \rightarrow E = m_0 c^2 \quad (1)$$

$$\text{Energy after emission of photon} \rightarrow E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0'^2 c^4} + hf \quad (2)$$

Conservation of energy: (1) = (2)  $\rightarrow$  [1 mark]

$$(m_0 c^2 - hf)^2 = (hf)^2 + m_0'^2 c^4 \quad (m_0 c^2)^2 - 2hf m_0 c^2 = m_0'^2 c^4$$

$$hf(2m_0 c^2) = (m_0^2 - m_0'^2) c^4 = (m_0 - m_0') c^2 (m_0 + m_0') c^2 \\ = \Delta E [2m_0 - (m_0 - m_0')] c^2 = \Delta E [2m_0 c^2 - \Delta E]$$

$$hf = \Delta E \left[ 1 - \frac{\Delta E}{2m_0 c^2} \right] \quad \text{Exact} \quad [1 \text{ mark}]$$

Semi-Newtonian solution (for  $\Delta E/m_0 c^2 \ll 1$ ), with classical relation for kinetic energy of atomic recoil  $K = p^2/2m_0$ , is also acceptable, with minor deduction (inexact, -1 mark).

(ii)

$hf$  = for emitted photon,  $hf_0 = \Delta E$  for unshifted energy.

$$\text{Hence, } \frac{\Delta f}{f_0} = \frac{\Delta E}{2m_0 c^2} \quad [1 \text{ mark}]$$

For He+ transition ( $n = 2 \rightarrow 1$ )  $\rightarrow$

$$\text{Bohr: } \Delta E = 13,6 \cdot 2^2 \cdot [1/1^2 - 1/2^2] \cong 40,8 \text{ eV} \\ m_0 c^2 = 3752 \cdot 10^6 \text{ eV}$$

$$\text{Frequency shift due to recoil gives } \frac{\Delta f}{f_0} = 5,44 \cdot 10^{-9}$$

This is very small compared to the gravitational red-shift of  $\Delta f/f \sim 10^{-5}$ , and may be ignored in gravitational red-shift experiment.

## Experiment 1 Endgeschwindigkeit in einem viskosen Medium

Ein Gegenstand, der in einer Flüssigkeit fällt, erreicht nach einiger Zeit eine konstante Endgeschwindigkeit. In diesem Experiment soll die Geschwindigkeit von Gegenständen bestimmt werden, die in Glycerin fallen.

Auf eine Kugel mit dem Radius  $r$ , die mit der Geschwindigkeit  $v$  durch eine Flüssigkeit fällt, wirkt die Reibungskraft  $F = 6\pi\eta r v$ . Hier werden jedoch keine Kugeln, sondern Metallzylinder verwendet (weil sie einfacher herzustellen sind). Durchmesser und Länge jedes Zylinders sind gleich. Für die Reibungskraft gilt dann eine ähnliche Beziehung wie im Fall der Kugel.

$$F_{\text{Zylinder}} = 6\pi\kappa\eta r^m v \quad (1)$$

Dabei ist  $r$  jetzt der Zylinderradius. Die Formel für die Kugel geht hieraus hervor für  $\kappa = 1$  und  $m = 1$ .

### Rechnerische Vorbereitung (2 Punkte)

Es ist zu zeigen, daß die Endgeschwindigkeit des Zylinders gegeben ist durch

$$v_E = C r^{3-m} (\rho - \rho') \quad (2)$$

Dabei ist  $\rho$  die Dichte des Zylinders,  $\rho'$  diejenige der Flüssigkeit und  $C$  eine Konstante, die angegeben werden soll.

### Experimenteller Teil

Benutze die gegebenen Geräte zur Bestimmung

- des Zahlwertes des Exponenten  $m$  (10 Punkte)
- der Dichte von Glycerin (8 Punkte)

### Anmerkungen

- Um gleiche experimentelle Bedingungen zu gewährleisten, sollte die Zylinderachse beim Fallen stets horizontal sein.
- Der Meßfehler im Durchmesser und in der Länge des Zylinders beträgt 0,05 mm (Du brauchst ihn nicht nachzumessen.)
- In dem Experimentiergefäß befindet sich ein Messingsieb, das benutzt werden soll, um die Metallzylinder aus dem Gefäß herauszuholen. *Wichtig:* Das Sieb muß vor Beginn der Experimente in das Gefäß gesteckt werden, da die Zylinder sonst für Wiederholungen der Messungen nicht mehr zur Verfügung stehen.
- Die Viskosität von Glycerin nimmt ab, wenn es Wasser aus der Luft absorbiert. Das Gefäß mit Glycerin sollte deshalb abgedeckt werden, wenn es nicht benutzt wird.
- Vertausche nach dem Experiment auf keinen Fall Zylinder verschiedener Größe und verschiedenen Materials!

Material	Dichte (kg/m <sup>3</sup> )	Material	Dichte (kg/m <sup>3</sup> )
Aluminium	2,70·10 <sup>3</sup>	Stahl	7,87·10 <sup>3</sup>
Titan	4,54·10 <sup>3</sup>	Kupfer	8,96·10 <sup>3</sup>

### Geräte

1 1000 ml Meßzylinder gefüllt mit Glycerin, 1 Behälter mit Glycerin zum Auffüllen des Meßzylinders, 1 elektronische Stoppuhr, 1 Lineal 30 cm lang, 1 Wäscheklammer, 1 Sieb zum Herausholen d. Zylinder, 1 Kunststoffpinzette, je 6 Aluminiumzylinder von 4, 5, 8, 10 mmØ,

je 6 Titan-, Stahl-, Kupferzylinder von 4,00 mmØ, Millimeter- und doppeltlogarithmisches Papier

## Marking Scheme to Experiment 1

### Preliminary: Calculation of Terminal Velocity

When the cylinder is moving at its terminal velocity, the resultant of the three forces acting on the cylinder - gravity, viscous drag and buoyant force - is zero

$$V\rho g - 6\pi\kappa\eta r^m v_T - V\rho'g = 0 \quad [1 \text{ mark}]$$

where  $V = 2\pi r^3$  is the volume of a cylinder (whose height is  $2r$ ).

This gives  $v_T = Cr^{3-m}(\rho - \rho')$   
 where  $C = g/3\kappa\eta$

Correct expression for  $C$  [1 mark]

### Experiment

#### Determination of $m$

For a typical set of measurements and graph of  $\log(\text{fall time})$  vs.  $\log(\text{diameter})$  see Table x and Figure x. Note that the errors are too small to be plotted on this graph - scatter of data points about a straight line and/or uncertainties in measuring the slope of a "line of best fit" will probably be used to estimate the error in  $m$ .

Reasonable range of data with a scatter of  $\sim 0.1$  s [2 marks]

Has checked that the cylinders have reached their terminal velocity

Visual check, or check referred to [1 mark]

Specific data presented [1 mark]

Labelled log-log graph [2 marks]

Data marks for all samples, with a reasonable scatter about a straight line on the log-log graph [1 mark]

Calculation of  $(3-m)$  from graph [1 mark]

including estimate of error in determining  $m$  [1 mark]

Reasonable value of  $m \sim 1.33$  [1 mark]

## Wissenschaftliche Neuigkeiten

**Interplanetarer Staub und Weltklima.** Etwa 10 000 Tonnen interplanetaren Staubs fallen jährlich auf die Erde. Ein Teil wird in ozeanischen Sedimenten gebunden. Die Analyse von Sedimenten aus dem Mittelatlantischen Rücken zeigen eine Schwankung des Gehalts an He-3 (das hauptsächlich aus dem Staub stammt) mit einer Periode von 100 000 Jahren. Dies könnte mit einer Hypothese in Verbindung gebracht werden, wonach die Bahnneigung der Erde mit derselben Periode schwankt (was als Erklärung für das Auftreten der Eiszeiten vorgeschlagen wird).

**Mikroskopisch kleine Ultraschallbausteine.** Bei Frequenzen oberhalb von 10 MHz erzeugen und empfangen die an der Stanford-Universität entwickelten Bausteine Ultraschall in Luft. (Gegenwärtiger Standard: 50 kHz.) Sie bestehen aus hunderten "Trommelfellen" von 0,025 mm Durchmesser und 0,001 mm Dicke. Durch Anlegen einer Spannung werden sie in Schwingungen versetzt. Regt sie ein Ultraschallpuls zum Schwingen an, kann an ihnen eine Spannung abgegriffen werden.

**Hubble findet weiteres Schwarzes Loch.** Ein Schwarzes Loch und eine Staubscheibe von 800 Lichtjahren Durchmesser mit Spiralstruktur glauben Astronomen mit Hilfe des Hubble-Teleskops in der Galaxie NGC 4261 (in Richtung Virgo, 100 Mio. Lichtjahren Entfernung) entdeckt zu haben. In einem Bereich, der kaum größer als unser Sonnensystem ist, ist Masse entsprechend 1,2 Mrd. Sonnen enthalten.

(Dies wird aus der Rotationsgeschwindigkeit der Gasmassen um des Schwarze Loch geschlossen.) Aber auch die Staubscheibe enthält genug Materie für 100 000 Sonnen. In elliptischen Galaxien wie NGC 4261 findet man normalerweise keinen Staub, da dort die Sternbildung abgeschlossen ist. Eine Erklärung könnte sein, daß die Staubscheibe der Rest einer kleineren Galaxie sein könnte, die in den Kern von NGC 4261 gefallen ist. Ein weiteres Rätsel ist, daß das Schwarze Loch 20 Lj. gegenüber dem galaktischen Zentrum verschoben ist. Eine Erklärung könnte der Rückstoß jenes Teils der aus der Scheibe in das Loch fallenden Materie sein, die gebündelt in den Raum geschleudert wird, wodurch auch die Radio-Jets erklärbar würden.

**Bilharziose.** Die dreidimensionale Struktur eines wichtigen Enzyms aus einer Gruppe von Parasiten, die Bilharziose übertragen, konnte von Wissenschaftlern der NASA, des Instituts für angewandte Mikrobiologie in Wien und des Nat. Inst. of Standards mit Röntgenstreuung bestimmt werden. Dadurch konnten jene Oberflächenteile identifiziert werden, die die Immunantwort hervorrufen, was Hoffnung auf die Entwicklung eines Impfstoffs weckt. Die Kristallisationstechnik von Proteinen wurde im Zusammenhang mit Weltraumforschung (Mikrogravitationsexperimente) entwickelt.

**Kosmische Strahlung.** Der höchstenergetische Anteil der kosmischen Strahlung (Teilchenenergie  $> 4 \cdot 10^{13}$  MeV) scheint wegen ihrer Einfallrichtung aus Nachbargalaxien zu stammen. Ihre Energie könnten die Teilchen in Radiogalaxien, den größten kosmischen Teilchenbeschleunigern, erhalten.