# Ein mechanisches Beispiel für eine Symmetriebrechung

Johann Ganzberger

Auf dieses einfache Experiment bin ich in dem schönen Buch *Nonlinear Systems* von P. G. Drazin gestoßen, habe es zuerst für ziemlich trivial gehalten und nicht weiter beachtet. Inzwischen finde ich es nicht nur faszinierend, sondern glaube, daß man anhand dieses Beispiels hervorragend den Begriff der Verzweigung, gegebenenfalls die Idee der linearen Stabilitätsanalyse und vor allem die Bedeutung des Potentials für Schüler klarmachen kann.

Biegen Sie einen etwas stärkeren Draht, auf dem sich eine durchbohrte Holzkugel möglichst reibungsfrei bewegen kann, zu einem Kreis. Beginnen Sie nun den Kreis, an dessen tiefstem Punkt sich die Kugel im stabilen Gleichgewicht befindet, langsam um die senkrechte Achse zu drehen (Bohrmaschine, Elektromotor oder freihändig). Was erwarten Sie? Sollten Sie meinen, daß die Kugel sofort entweder nach links oder nach rechts ausbricht, dann werden Sie viel Freude mit dem Versuch und den folgenden Überlegungen haben. Bis zu einer bestimmten kritischen Kreisfrequenz (z.B. ω = 10 Hz für einen Radius r = 10 cm) wird sich die Kugel nicht von der Stelle rühren, und das hat mit der Reibungskraft gar nichts zu tun!

Im Gleichgewicht muß die resultierende Kraft senkrecht auf die Tangente also in Richtung $\vec{r}$ zeigen, sonst würde sich ja die Kugel verschieben. Daraus folgt sofort

$$\tan\varphi = \frac{r\omega^2 \sin\varphi}{g}$$

Mag. Johann Ganzberger
Kanalstraße 4/A5
1220 Wien

Diese Gleichung hat mehrere Lösungen für φ:

1) $\sin\varphi = 0$. Die Nullage ist also stets ein Gleichgewichtspunkt (aber nicht immer stabil). Auch $\varphi = \pm\pi$ sind Gleichgewichtspunkte (allerdings - wie wir zeigen werden - stets instabil).

2) $\cos\varphi = g/r\omega^2$, falls (und das ist der springende Punkt) $g \le r\omega^2$. Also erst wenn $r\omega^2 > g$ wird, entfernt sich die Kugel spontan aus der Ruhelage.

An dieser Stelle beginnt meistens die unvermeidliche Diskussion, ob man denn nicht - wenn man "alles ganz genau wüßte" - vorhersagen könnte, nach welcher Seite die Kugel wandert. Auf diese Diskussion sollte man sich einlassen und so den Begriff der Verzweigung erarbeiten.

Woher weiß man, ob ein Gleichgewichtspunkt stabil oder instabil ist?

Zuerst schreibt man sich die Bewegungsgleichung der Kugel auf (Summe der Drehmomente)

$$mr^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgr\sin\varphi + mr^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi$$

und formt sie ein wenig um:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \omega^2\sin\varphi\left(\cos\varphi - \frac{g}{r\omega^2}\right) = F(\varphi)$$

Im Gleichgewicht ist die Winkelbeschleunigung gleich 0 und also auch $F(\varphi) = 0$. Folglich $\sin\varphi = 0$ oder $\cos\varphi = g/r\omega^2$, wie gehabt. Jetzt ersetzt man $F(\varphi)$ in der Nähe eines Gleichgewichtspunktes $\varphi_0$ durch seine Tangente (Fortgeschrittene sprechen von Taylorreihe):

$$F(\varphi) \approx F'(\varphi_0)\cdot\Delta\varphi + F(\varphi_0) = F'(\varphi_0)\cdot\Delta\varphi$$

mit $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$, weil ja $F(\varphi_0) = 0$ ist.

Für eine kleine Störung Δφ aus dem Gleichgewicht ergibt sich damit aus (1) die Gleichung

$$\frac{d^2}{dt^2}\Delta\varphi = F'(\varphi_0)\cdot\Delta\varphi$$

Für $F'(\varphi_0) < 0$ ist $\varphi_0$ offensichtlich stabil, denn die Lösungen von (2) sind dann harmonische Schwingungen von $\Delta\varphi$ und in der Praxis gedämpft, sodaß die Störung verschwindet, während für $F'(\varphi_0) > 0$ die Störung exponentiell anwächst, also vom Gleichgewicht wegläuft (instabil).

In unserem Beispiel ist

$$F'(\varphi) = \omega^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi - \cos\varphi\frac{g}{r\omega^2}\right)$$

und sofort läßt sich die Stabilität der Punkte $\varphi = 0$, $\varphi = \pm\pi$, $\varphi = \pm\arccos(g/r\omega^2)$ nach diesem Kriterium überprüfen:

$\varphi = 0$ stabil für $r\omega^2 < g$,

$\varphi = \pm\pi$ immer instabil,

$\varphi = \pm\arccos(g/r\omega^2)$ stabil für $r\omega^2 > g$ (nachrechnen!).

Noch deutlicher sieht man die Sache, wenn man sich ins Potentialgebirge begibt und nachschaut, wie die Berge und die Täler verlaufen. Was man gerne hätte, ist hier eine Funktion $V(\varphi)$ genannt "Potential", die bei den instabilen Gleichgewichtspunkten ($F(\varphi) = 0$, $F'(\varphi) > 0$) ein Maximum hat (Vorstellung: Eine dort liegende Kugel rollt nach der kleinsten Störung hinunter ins Tal) und bei den stabilen Punkten ($F(\varphi) = 0$, $F'(\varphi) > 0$) ein Minimum (Kugel bleibt dort liegen). Wer schon mit dem Handwerk der "Kurvendiskussion" vertraut ist, entdeckt sofort, daß $F(\varphi)$ bis aufs Vorzeichen und bis auf eine additive Konstante nichts anderes ist als die erste Ableitung von $V$.

Also ist $V(\varphi) = -\int_0^{\varphi} F(x)dx$ (mit der Wahl $V(0) = 0$).

In unserem Fall ergibt sich

$$V(\varphi) = \omega^2\left(\frac{g}{r\omega^2}(1 - \cos\varphi) - \frac{\sin^2\varphi}{2}\right)$$

Das Zeichnen überläßt man gerne dem Computer:

Das schaut man sich in Ruhe an und begreift:
*"Ein Potential sagt mehr als tausend Rechnungen!"*

## Literatur

P. G. Drazin, *Nonlinear Systems*, Cambridge University Press, 1992