

Gedanken beim Sonnenuntergang

Udo Backhaus

"... sah ich nichts als das tiefe Becken des Nachthimmels, denn ich lag mit ausgebreiteten Armen rücklings auf einem Dünengrat und sah ins Sternengewimmel. Ich war mir damals noch nicht so recht klar, wie tief dieses Meer ist, und so fasste mich der Schwindel, als ich es plötzlich entdeckte. Ich fand keine Wurzel, an die ich mich klammern konnte, und kein Dach und kein Zweig waren zwischen diesem Abgrund und mir. Ich war schon losgelöst und begann hineinzufallen wie ein Taucher ins Meer. Aber ich fiel nicht. Ich fühlte mich von Kopf zu den Zehen mit unzählbaren Banden der Erde verknüpft. ... Schwebend hing ich an der Erde ..."

(Saint-Exupery, 1999).

Das Erlebnis eines Sonnenunterganges

Eine der Initialzündungen für mein astronomisches Interesse, für meine Beobachtungen des Tages- und des Sternenhimmels und für die Faszination, die für mich von den dabei gemachten Erfahrungen ausgeht und die ich versuche, unseren Lehramtsstudierenden zu vermitteln, war die Lektüre von Martin Wagenscheins Aufsatz „Die Erfahrung des Erdballs“ (Wagenschein, 1988). Wagenschein plädiert dort am Beispiel der Beobachtungen, die mit der Kugelgestalt der Erde, ihrer Rotation und ihrem Umlauf um die Sonne zusammenhängen, eindrucksvoll dafür, dass es nicht genüge, Sätze zu lehren, auch nicht, sie zu veranschaulichen, dass es vielmehr darauf ankomme, verstehen zu lehren. Und das heiße, „*sie (die Schüler) einsehen (zu) lassen, wie die Menschheit auf den Gedanken („Die Erde ist eine Kugel.“) kommen konnte (und kann), so etwas nachzuweisen, weil die Natur es ihr anbot (und weiter anbietet). Und wie es dann gelang und je neu gelingt.*“

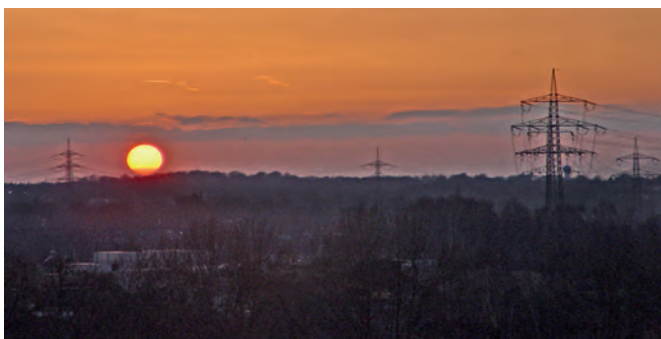


Abb. 1: Sonnenuntergang am 22. März 2010, beobachtet von meinem Dienstzimmer aus.

Seit vielen Jahren verfolge ich den täglichen Sonnenlauf und seine Veränderung während des Jahres¹. Ich beobachte

¹ Eine fotografische Dokumentation der Veränderung des Sonnenuntergangspunktes ist zu finden unter <http://www.didaktik.physik.uni-duisburg-essen.de/~backhaus/Sonnenuntergaenge/>.

Univ.-Prof. i.R. Dr. Udo Backhaus, Fakultät für Physik der Universität Duisburg-Essen, E-Mail: udo.backhaus@uni-due.de

und genieße Sonnenuntergänge auf Spaziergängen, am Meer und im Gebirge und habe das auch schon auf der Südhalbkugel getan. Ich denke und fühle mich dabei in die Erdkugel und ihre Drehung ein und ärgere mich immer wieder über voreilige Belehrungen, die Bewegung der Sonne über den Himmel als nur scheinbar abzutun. Stattdessen versuche ich, die Erde trotzdem als Heimat im Sinne Wagenscheins zu behalten, indem ich mich „*von jeder Scholle des riesigen mütterlichen Erdleibes*“ gehalten fühle.

„Wer die Erdkugel als Heimat gewinnen will, lernt es am besten auf weiten Reisen. ... Für den, der so weit nicht kommt, ist das Schwierige, dass die Erde so groß ist, dass wir das Kippen (der Himmelskuppel) erst bei weiten Reisen merken. ... Wir müssen lernen, uns gleichzeitig an allen Orten zu wänen.“

Mit den Überlegungen dieses Aufsatzes möchte ich darauf aufmerksam machen, dass man bereits *im Liegen auf einer Sommerwiese*, bei der Beobachtung eines Sonnenunterganges, der Erdkugel auf die Spur kommen kann. Darüber hinaus wird es sich als möglich erweisen, sogar die Größe der Erde abzuschätzen.

Einfache Beobachtungen — überraschende Folgerungen

Dieser Aufsatz wurde durch einen sehr lesenswerten Artikel in der Zeitschrift *Astronomie+Raumfahrt* angeregt, in dem W. Schlosser (2003) kritische Anmerkungen zu Gestalt und Ausrichtung der Mondsichel und zur Methode von Aristarch macht, die Entfernung zur Sonne bei Halbmond zu messen. Darüber hinaus befasst sich Schlosser ausführlich mit den Schlussfolgerungen, die sich aus der Beobachtung von Sonnenuntergängen ziehen lassen. Die wesentlichen Ergebnisse dieser Überlegungen sind:

- Aus der Erfahrung, dass die Sonne direkt am Horizont untergeht (Abb. 1), kann man schließen, dass die Erdoberfläche gekrümmt sein muss.
- Aus dem zusätzlichen Wissen, dass Sonnenuntergänge überall auf der Erde gleich aussehen, folgt dann die Kugelgestalt der Erde.
- Aus der Beobachtung, dass die Sonne beim Untergang deutlich abgeplattet erscheint (Abb. 2), folgt, dass die Atmosphäre nicht homogen sein kann, sondern dass ihre Dichte mit zunehmender Höhe abnehmen muss; denn bei einer Atmosphäre mit konstanter Dichte säße die untergehende Sonne kreisrund aus. Dieser Schluss ist allerdings nicht leicht zu ziehen: Es sind Beispielrechnungen unter der Annahme einer homogenen Atmosphäre erforderlich.



Abb. 2: Ausschnittsvergrößerung aus Abb. 1.
Die Abplattung, d. h. das Verhältnis aus der Differenz zwischen horizontalem und vertikalem Durchmesser und dem horizontalen Durchmesser $A = \frac{r_h - r_v}{r_h}$ beträgt etwa 0.14.

Solche Schlussfolgerungen könnten einen naturwissenschaftlich Gebildeten, der träumend, aber mit voller Hinwendung einen Sonnenuntergang beobachtet, veranlassen, die Kugelgestalt der Erde *wahrzunehmen, ja zu fühlen, ganz ähnlich wie sich der auf einem Tafelberg gelandete Pilot in Saint-Exupery's Erzählung „Das Flugzeug und der Planet“*, aus der eingangs zitiert wurde, von der Erde *gehalten fühlt*. Etwa folgendermaßen:

Ich sehe die Sonne deutlich abgeplattet untergehen; ihre vertikale Ausdehnung scheint kleiner zu sein als die horizontale. Wenn ich davon ausgehe, dass die Sonne als physikalischer Körper immer noch kugelförmig ist, dann muss es sich um einen Scheineffekt handeln, der dadurch erzeugt wird, dass das Licht auf dem Wege von der Sonne zu mir aus der Geradlinigkeit (vertikal) abgelenkt wird. Die nächstliegende Vermutung: Das Licht wird beim Eintritt in die Lufthülle der Erde, eventuell auch auf seinem Wege durch die Atmosphäre, gebrochen. Vielleicht wäre die Sonne ohne die durch diese Lichtbrechung hervorgerufene Hebung bereits untergegangen.

Wenn es sich aber um Lichtbrechung beim Übergang vom optisch dünneren Medium (dem Vakuum des Weltraums) in die optisch dichtere Atmosphäre handelt, dann gibt es einen maximal möglichen Ablenkungswinkel, der bei streifendem Auftreffen auf die Atmosphäre auftritt. Wenn die Erde eine Scheibe wäre, könnte mich das Sonnenlicht deshalb nicht vom Horizont erreichen, sondern mit einem Höhenwinkel gegen den Horizont, der diesem maximalen Ablenkungswinkel gleicht. Vorausgesetzt, dass dieser Grenzwinkel nicht unbeobachtbar klein ist, müsste die Sonne oberhalb des Horizonts untergehen. Ich sehe aber die Sonne deutlich direkt am Horizont untergehen (Abb. 3).



Abb. 3: Die untergehende Sonne taucht ins Meer ein.

Und selbst wenn Dunst den Horizont unkenntlich macht, wird er mir von der Lichtbahn zur Sonne, dem Sonnenschwert, angezeigt (Abb. 4). Die Erde kann also keine Scheibe sein; ihre Oberfläche muss gekrümmt sein.

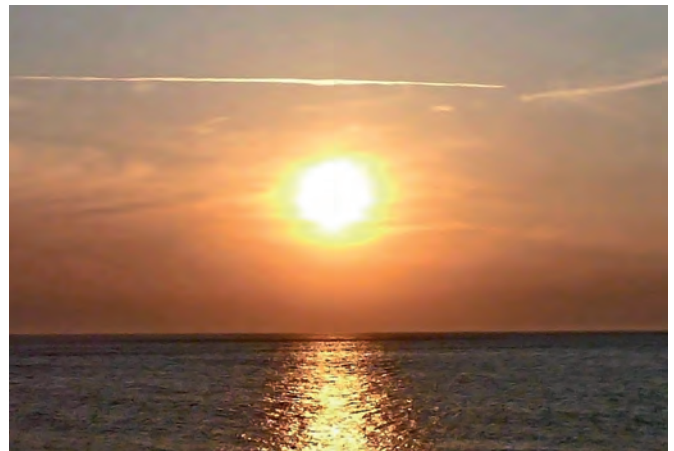


Abb. 4: Das Schwert der Sonne macht den Horizont auch bei Dunst sichtbar.

Mich würde sehr interessieren, ob dieser Effekt groß genug wäre, um bei flacher Erde beobachtbar zu sein!

Aber selbst wenn sich die Unterangshöhe unbeobachtbar wenig von 0° unterschiede, wäre ein anderer Effekt unübersehbar: Bei Annäherung an den Horizont würde die Sonne immer flacher aussehen, bis sie schließlich als horizontaler Strich verschwände: In der Nähe des streifenden Einfalls werden alle auftreffenden Lichtstrahlen nahezu in dieselbe Richtung gebrochen. Das widerspricht aber meiner Erfahrung. Auch aus diesem Grunde kann die Erde keine Scheibe sein!

Die Probleme mit dem Sonnenuntergang am Horizont und mit der nur geringen Abplattung der untergehenden Sonne lassen sich durch die Annahme beseitigen, dass die Erdoberfläche gekrümmt ist. Dann können mich die Strahlen der untergehenden Sonne vom Horizont erreichen, ohne dass sie streifend auf die Atmosphäre treffen.

Ich kann mich erinnern, dass die Form der untergehenden Sonne zu jeder Jahreszeit gleich aussieht. Sie ist also unabhängig davon, in welcher Himmelsrichtung die Sonne untergeht. Gleiche Beobach-

ungen habe ich an mehreren Orten der Erde gemacht, und viele Fotos überzeugen mich davon, dass die untergehende Sonne an jedem Ort der Erde und zu jeder Zeit im Jahr gleich aussieht. Die Krümmung der Erde muss also an allen Orten und in allen Richtungen gleich sein: Die Erde ist eine Kugel!

Die bisherigen Überlegungen sind unabhängig davon, wie die Atmosphäre im Detail aufgebaut ist. Sie lassen sich sogar am leichtesten unter der Annahme verstehen, dass die Lufthülle der Erde homogen, die Dichte der Luft unabhängig von der Höhe über dem Erdboden ist. Bei homogener Atmosphäre aber würde eine zunehmende Krümmung der Erdoberfläche sehr schnell dazu führen, dass der Einfallswinkel der Strahlen der untergehenden Sonne kleiner wird. Dadurch würde die Abplattung der Sonne schnell kleiner, und die Sonne würde (annähernd) kreisrund untergehen. Die deutliche Abplattung kann deshalb zwei Ursachen haben: Entweder ist die Lufthülle homogen, dann muss die Erde sehr groß sein. Oder die Dichte der Luft muss nach oben abnehmen.

Mich würde interessieren, ob sich diese Überlegungen auch quantitativ präzisieren lassen: Lässt sich mit ihrer Hilfe aus den beobachteten Werten für optische Hebung² und Abplattung der Sonne vielleicht sogar die Größe der Erde abschätzen?

Simulationen

Der Schluss aus der Beobachtung eines Sonnenuntergangs am Horizont auf die Kugelgestalt der Erde leuchtete mir beim Lesen von Schlossers Aufsatz unmittelbar ein. Auch die Folgerungen aus der Abplattung der Sonne faszinierten mich. Zu meiner Überraschung aber fanden Freunde und Kollegen die Überlegungen weniger überzeugend. So wurden die Effekte zwar nicht grundsätzlich abgestritten, aber sie wurden für so klein gehalten, dass die Erscheinungen beim Sonnenuntergang trotzdem noch mit einer flachen Erde verträglich wären.

Tatsächlich sind quantitative Abschätzungen nicht ganz einfach, und insbesondere das Argument für eine Atmosphäre mit einer nach oben abnehmenden Dichte wird erst durch Rechnungen richtig überzeugend. Außerdem scheint der Versuch lohnend, zu weiteren, quantitativen, Schlussfolgerungen zu gelangen. Deshalb sollen die Beobachtungen im Folgenden simuliert und grafisch dargestellt werden. Dabei wird, wenn nicht eine Atmosphäre mit konstanter Dichte vorausgesetzt wird, von einer isothermen Atmosphäre ausgegangen, deren Druck gemäß

$$p(h) = p_0 e^{-\lambda h} \quad (1)$$

mit der Höhe h über dem Erdboden exponentiell abnimmt. Die Abhängigkeit zwischen Druck p , absoluter Temperatur T und Brechungsindex n der Luft wird nach Liljeqvist & Cihak (1994) folgendermaßen näherungsweise berechnet:

$$n(h, T) = 1.0 + \left(\frac{77.6 \text{ K}}{T} \left(\frac{p(h)}{\text{mb}} + 4810 \frac{\text{K}}{T} \frac{e(h)}{\text{mb}} \right) \right) 10^{-6} \quad (2)$$

In den Simulationen wird von trockener Luft ausgegangen, der Partialdruck e des Wasserdampfes wird also null gesetzt. Die Temperatur wird mit $T = 273 \text{ K}$ angenommen.

Der Simulation liegt ein Raytracing-Verfahren zugrunde, bei dem der Sonnenuntergang „fotografiert“ wird: Für jeden Punkt der Bildebene wird der auftreffende Lichtstrahl durch das Objektiv einer Kamera zurückverfolgt, bis man auf das Objekt stößt, von dem der Strahl ausgegangen ist. Der Bildpunkt erhält dann die Farbe dieses Objektes. Zentrale Prozedur bei dieser Strahlverfolgung ist die Anwendung des Brechungsgesetzes. Im Falle der inhomogenen Atmosphäre wird es nach einer vorgegebenen Weglänge (z. B. 1000 m) immer wieder angewendet, indem für die erreichte Höhe erneut der Brechungsindex nach Gleichung (2) berechnet wird. Da die Geometrie der Szene sehr einfach ist, braucht das nur für die vertikale Symmetrieachse durchgeführt zu werden. Die horizontale Ausdehnung der Sonne ergibt sich aus der Objektivbrennweite, die vertikale durch den Abstand der beiden Strahlen, die die Sonne gerade noch treffen. Die genaue Form der Sonne muss dann noch durch Abtasten der Sonnenumgebung ermittelt werden.

Um das Untergehen der Sonne am Horizont, bzw. ihr Eintauchen ins Meer, wie in der Realität noch deutlicher und die Simulation insgesamt realistischer zu machen, wird zusätzlich das so genannte „Schwert der Sonne“ (vgl. Schlichting, 1998, und Schlichting, 1999, siehe Abb. 4) berechnet. Dabei wird von einer leicht gekräuselten Wasseroberfläche ausgegangen, deren Neigung gegen die Horizontale kleiner als ein vorgegebener Maximalwinkel α_{max} ist. Dazu wird jeder Punkt der Wasseroberfläche als potentieller Spiegel betrachtet, der Licht von der Sonne in die Kamera reflektiert. Es werden nur die Punkte der Wasseroberfläche hell abgebildet, für die das zu diesem Strahlverlauf gehörige Einfallslot weniger als α_{max} gegen die Vertikale geneigt ist.

Mit diesem Programm³ erzielt man folgende Ergebnisse:

- Durch Variation der Parameter (geometrische Position der Sonne, α_{max} , Höhe des Beobachtungsstandortes, Temperatur, Erdradius R) lassen sich befriedigende Übereinstimmungen zwischen Fotografien und Simulationen erzielen (siehe z. B. Abb. 5).
- Für realistische Parameter ($T = 273 \text{ K}$, $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$, $R = 6370 \text{ km}$) erhält man am Horizont mit einer Abplattung der Sonne von $A \approx 0.18$ und einer optischen Hebung von $\delta = 0.59^\circ$ Werte, die fast exakt mit der Realität (Abplattung ≈ 0.17 , Hebung $\approx 0.58^\circ$) übereinstimmen (Abb. 6).

² Tatsächlich ist die optische Hebung nicht einfach zu beobachten. Sie ergibt sich erst, wenn man die im Laufe des Tages vermessene Bewegung der Sonne (Tatsächlich macht man es mit Sternen.) bis zum Horizont extrapoliert und dort eine Abweichung von der gleichförmigen Kreisbewegung feststellt.

³ Das Programm kann beim Autor angefordert werden.



Abb. 5: Schwert der untergehenden Sonne, fotografiert mit einem Teleobjektiv (aus Schlichting, 1998), und die entsprechende Simulation ($f = 400 \text{ mm}$, $\alpha_{\text{max}} = 1.2^\circ$)



Abplattung: 0.18
optische Hebung: 0.59

Abb. 6: Simulation eines Sonnenunterganges am Meer mit realistischen Parametern ($R = 6370 \text{ km}$, $T = 273 \text{ K}$, $\alpha_{\text{max}} = 5^\circ$). Geometrisch befindet sich die Sonne bereits 0.4° unter dem Horizont.



Abb. 7: Bei scheibenförmiger Erde ginge die Sonne als schmaler Strich etwa 1.4° oberhalb des Horizonts unter. In den grau gezeichneten Bereich zwischen Untergangshöhe und Horizont gelangt kein Licht von außen. Das total reflektierte Licht von der Erdoberfläche dürfte nicht intensiv genug sein.

- Bei scheibenförmiger Erde geht die Sonne, unabhängig vom Aufbau der Atmosphäre, als sehr flache Ellipse in einer Höhe von etwa 1.4° unter (Abb. 7), wenn die Sonne geometrisch gerade unter dem Horizont verschwunden ist. Die optische Hebung beträgt $\delta \approx 1.6^\circ$.
- Bei realer Größe der Erde ergibt sich bei homogener Atmosphäre für die optische Hebung mit 0.36° ein ungefähr richtiger Wert. Allerdings geht die Sonne fast kreisrund unter (Abb. 8).

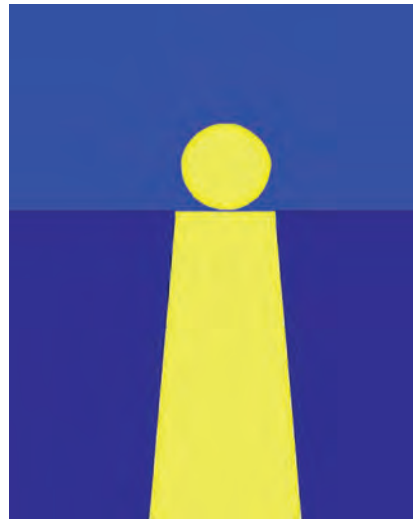


Abb. 8:
Bei homogener Atmosphäre würde man auf der Erde einen kreisrunden Sonnenuntergang beobachten.

- Nahezu unabhängig vom Aufbau der Atmosphäre geht die Sonne bei einem Erdradius $R < 28000 \text{ km}$ am Horizont unter⁴. Allerdings würden Sonnenuntergänge auch bei deutlich kleineren Werten für den Erdradius ganz anders aussehen (Abb. 9), als wir es gewohnt sind.



Abb. 9: Bei einem Erdradius von $R = 20000 \text{ km}$ würden Sonnenuntergänge deutlich anders aussehen.

- Bei homogener Atmosphäre ergibt sich für $R \approx 14000 \text{ km}$ die tatsächlich beobachtete optische Hebung am Horizont (siehe Anhang). Allerdings geht dann die Sonne kreisrund unter.

Um herauszufinden, welche Größe der Erde mit den beobachteten Werten für optische Hebung und Abplattung verträglich ist, bestimmt man sie numerisch als Funktion

⁴ Das lässt sich für die homogene Atmosphäre auch leicht theoretisch verstehen (siehe Anhang).

des Erdradius. Dazu wird mit dem Simulationsprogramm die geometrische Höhe der Sonne so eingestellt, dass der untere Rand der scheinbaren Sonne gerade den Horizont berührt. Dabei ergibt sich, dass sich realistische Werte ($A \approx 0.17$, $\delta \approx 0.58^\circ$) nur im Intervall $5500 \text{ km} < R < 7000 \text{ km}$ ergeben (Abb. 10).

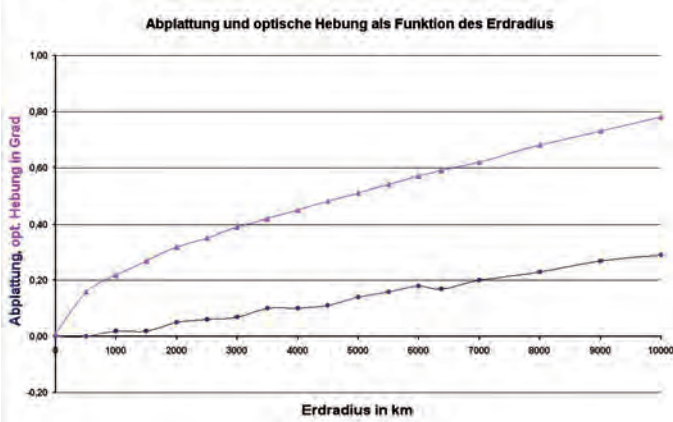


Abb. 10: Veränderung von optischer Hebung (Quadrate) und Abplattung (Kreise) der untergehenden Sonne in Abhängigkeit vom Erdradius (isotherme Atmosphäre)

Bei homogener Atmosphäre dagegen ist es unmöglich, für eine bestimmte Erdgröße realistische Werte für Abplattung und optische Hebung gleichzeitig zu erreichen (Abb. 11).

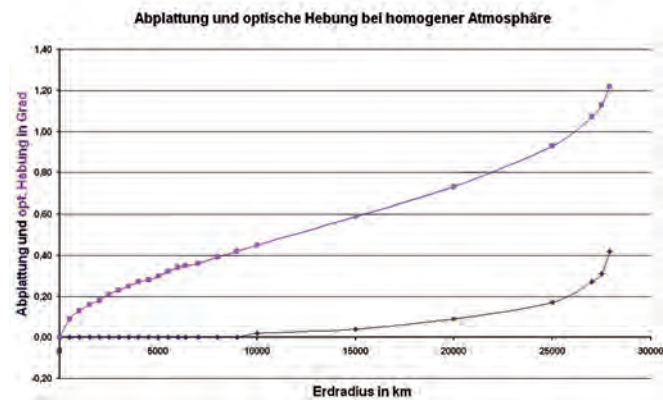


Abb. 11: Veränderung von optischer Hebung (Quadrate) und Abplattung (Kreise) der untergehenden Sonne in Abhängigkeit vom Erdradius (homogene Atmosphäre)

Fazit

Der Träumende, der liegend den Sonnenuntergang verfolgte, ist mit der Erdkugel vertraut geworden. Er ist nicht nur der Krümmung der Oberfläche auf die Spur gekommen, sondern hat die Erde als Kugel erkannt, deren Größe er abschätzen konnte. Vielleicht gelingt es ihm, nachdem die Sonne untergegangen ist, sich vorzustellen, wie er sich gerade mit der ganzen Erde zusammen aus dem Sonnenlicht hinauswälzt.

Grundlegend war dabei seine Kenntnis des Phänomens der Lichtbrechung. Für erste quantitative Abschätzungen

brauchte er den Brechungsindex der Luft und den Luftdruck am Boden. Für genauere Abschätzungen, die ihn zur Erkenntnis der nach oben abnehmenden Dichte der Atmosphäre und schließlich zur richtigen Größenordnung für den Erdradius führten, musste er allerdings nach Hause gehen, um genauere Annahmen über die optische Hebung am Horizont, die Abnahme der Dichte mit der Höhe und den Zusammenhang zwischen Brechungsindex und Luftdruck zu erlangen.

Typisch für astronomische und astrophysikalische Überlegungen ist dabei, dass Kenntnisse aus ganz verschiedenen Bereichen zusammengeführt werden müssen. Der Reiz, aber auch die Herausforderung besteht gerade in dieser „Vernetzung“, die bisher im Physikunterricht, aber auch in der universitären Physikausbildung, zu kurz kommt.

Literatur

- Liljeqvist, G. H. & Cehak, K. (1994): *Allgemeine Meteorologie*, Springer: Berlin.
- Saint-Exupery, A. (1999): *Wind, Sand und Sterne*, Rauch: Düsseldorf, 85.
- Schlichting, H.-J. (1998): Das Schwert der Sonne – Alltägliche Reflexionen im Lichte eines einfachen optischen Phänomens. Teil 1: Überblick und Phänomene, *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* 51/7, 387-397
- Schlichting, H.-J. (1999): Das Schwert der Sonne – Alltägliche Reflexionen im Lichte eines einfachen optischen Phänomens. Teil 2: Mathematische Modellierung und Simulation, *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* 52/6, 330-336.
- Schlosser, W. (2003): Einfache Beobachtungen – überraschende Folgerungen, *Astronomie + Raumfahrt* 42/1, 4-7.
- Wagenschein, M. (1988): Die Erfahrung des Erdballs. In: M. Wagenschein, *Naturphänomene sehen und verstehen – Genetische Lehrgänge*. Klett: Stuttgart (im Internet unter <http://martin-wagenschein.de/Archiv/W-010.pdf>)

Anhang

Quantitative Abschätzungen für eine Atmosphäre konstanter Dichte

Die Dicke der homogenen Atmosphäre

Für den Luftdruck p_0 an der Erdoberfläche gilt:

$$p_0 = \frac{mg}{A} = \frac{nM_L g}{A}$$

Dabei ist A eine beliebige Fläche, g die Erdbeschleunigung, m die Masse der Luft über der Fläche und n die zugehörige Stoffmenge und M_L die molare Masse von Luft.

Bei konstanter Dichte der Luft gilt für das Volumen V der über der Fläche befindlichen Luft

$$V = Ah = nV_m$$

Dabei sind h die Dicke der Luftschicht und V_m das Volumen eines Mols Luft. Bei vorgegebener Temperatur T gilt nach der allgemeinen Gasgleichung (R allgemeine Gaskonstante)

$$p_0 V_m = RT$$

Fasst man diese Gleichungen zusammen, ergibt sich

$$h = \frac{nV_m}{A} = \frac{p_0 V_m}{M_L g} = \frac{RT}{M_L g}$$

Die Dicke der Atmosphäre hängt also nur von der vorgegebenen Temperatur ab:

$$h = \frac{RT}{M_L g} \quad (3)$$

Wenn die Dichte der Luft konstant wäre, wäre demnach (bei $T = 273$ K) die Atmosphäre ungefähr 8 km dick.

Abschätzung des Erdradius aus der am Horizont beobachtbaren atmosphärischen Hebung

Sei δ die beobachtete optische Hebung am Horizont.

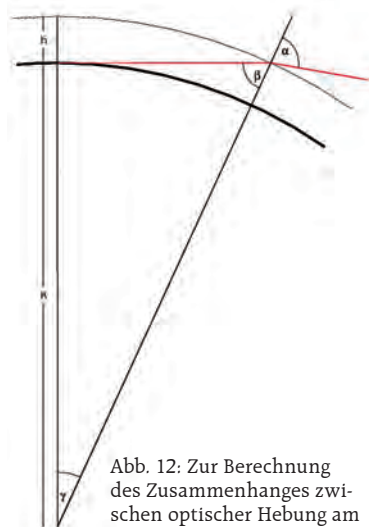


Abb. 12: Zur Berechnung des Zusammenhangs zwischen optischer Hebung am Horizont und Erdradius bei homogener Atmosphäre

Dann gilt, bei angenommener Homogenität der Atmosphäre, nach Abb. 12

$$n_{\text{Luft}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin(\beta + \delta)}{\sin \beta}$$

Wegen

$$\sin \beta = \frac{R}{R+h} \quad (4)$$

und

$$\begin{aligned} \sin(\beta + \delta) &= \\ &= \sin \beta \cos \delta + \cos \beta \sin \delta \end{aligned}$$

ergibt sich daraus

$$\frac{\sin \beta \cos \delta + \sin \delta \sqrt{1 - \sin^2 \beta}}{\sin \beta} = n \Rightarrow$$

$$\cos \delta + \sin \delta \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \beta} - 1} = n \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \beta} - 1} = \frac{n - \cos \delta}{\sin \delta} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sin^2 \beta} = \left(\frac{n - \cos \delta}{\sin \delta} \right)^2 + 1 = \frac{n^2 - 2n \cos \delta + 1}{\sin^2 \delta}$$

Daraus ergibt sich

$$\sin^2 \beta = \frac{\sin^2 \delta}{n^2 - 2n \cos \delta + 1} \quad (5)$$

Wenn aber $\sin \beta$ bekannt ist, lässt sich nach (4) der zugehörige Erdradius berechnen:

$$R = \frac{\sin \beta}{1 - \sin \beta} h \quad (6)$$

Für $T = 273$ K, $\delta = 0,58^\circ$, $h = 8040$ m und $n = 1,000288$ ergibt sich z. B. $R = 14300$ km. Das ist zwar kein sehr guter Wert, aber die Größenordnung ist richtig – mehr konnte bei der groben Näherung nicht erwartet werden!

Grenzgröße der Erde für Sonnenuntergänge am Horizont

Um herauszufinden, ab welcher Größe der Erde kein Sonnenlicht mehr die Erdoberfläche streifend erreichen kann, verändere man in Abb. 12 den Erdradius so, dass der Sonnenstrahl, der streifend auf die Erdoberfläche trifft, auch den äußeren Rand der Atmosphäre streifend erreicht. Nach Gleichung (4) muss man dazu den Erdradius vergrößern.

In diesem Fall entspricht der Eintrittswinkel β in die Atmosphäre dem Grenzwinkel der Totalreflexion β_{gr} , für den gilt

$$\sin \beta_{gr} = \frac{1}{n}$$

Damit wird aus (4)

$$\sin \beta_{gr} = \frac{R_{gr}}{R_{gr} + h} \Rightarrow R_{gr} + h = n R_{gr}$$

und daraus folgt

$$R_{gr} = \frac{h}{n-1} \quad (7)$$

Setzt man für den Brechungsindex der Luft den Wert ein, der sich nach (2) für $T = 273$ K und $p_0 = 1013$ mb ergibt, $n = 1,000288$, dann ergibt sich für den Erdradius, von dem ab es bei homogener Atmosphäre keinen Sonnenuntergang am Horizont mehr geben kann, $R_{gr} \approx 3472$ h ≈ 28000 km. Man kann also bereits mit einfachsten Überlegungen aus der Beobachtung der untergehenden Sonne schließen, dass die Erdoberfläche nicht eben sein kann, sondern mindestens so gekrümmt sein muss, wie es dem Radius R_{gr} entspricht.