

Vom Schwarzen Loch zur Dunklen Materie

Zwei Aufgaben zur Astronomie

Franz Embacher

Schwarzes Loch, Dunkle Materie – klingt faszinierend und scheint kompliziert. Es ist aber erstaunlich, dass man sich auch diese Bereiche mit relativ einfachen Aufgaben erschließen kann.

Aufgabe 1: Das Schwarze Loch im Zentrum unserer Milchstraße

Im Zentrum der Milchstraße befindet sich ein „dunkles“ Objekt (Sagittarius A* = Sgr A*), um das Sterne kreisen. Sgr A* emittiert vor allem im Radiobereich des elektromagnetischen Spektrums. Sgr A* ist im nahen Infrarot und

im Röntgenbereich schwach sichtbar und „flackert“: Seine Helligkeit ist einmal pro Tag etwa eine halbe Stunde lang stark erhöht. Die charakteristische Zeit dieser Änderung beträgt etwa 10 Minuten.

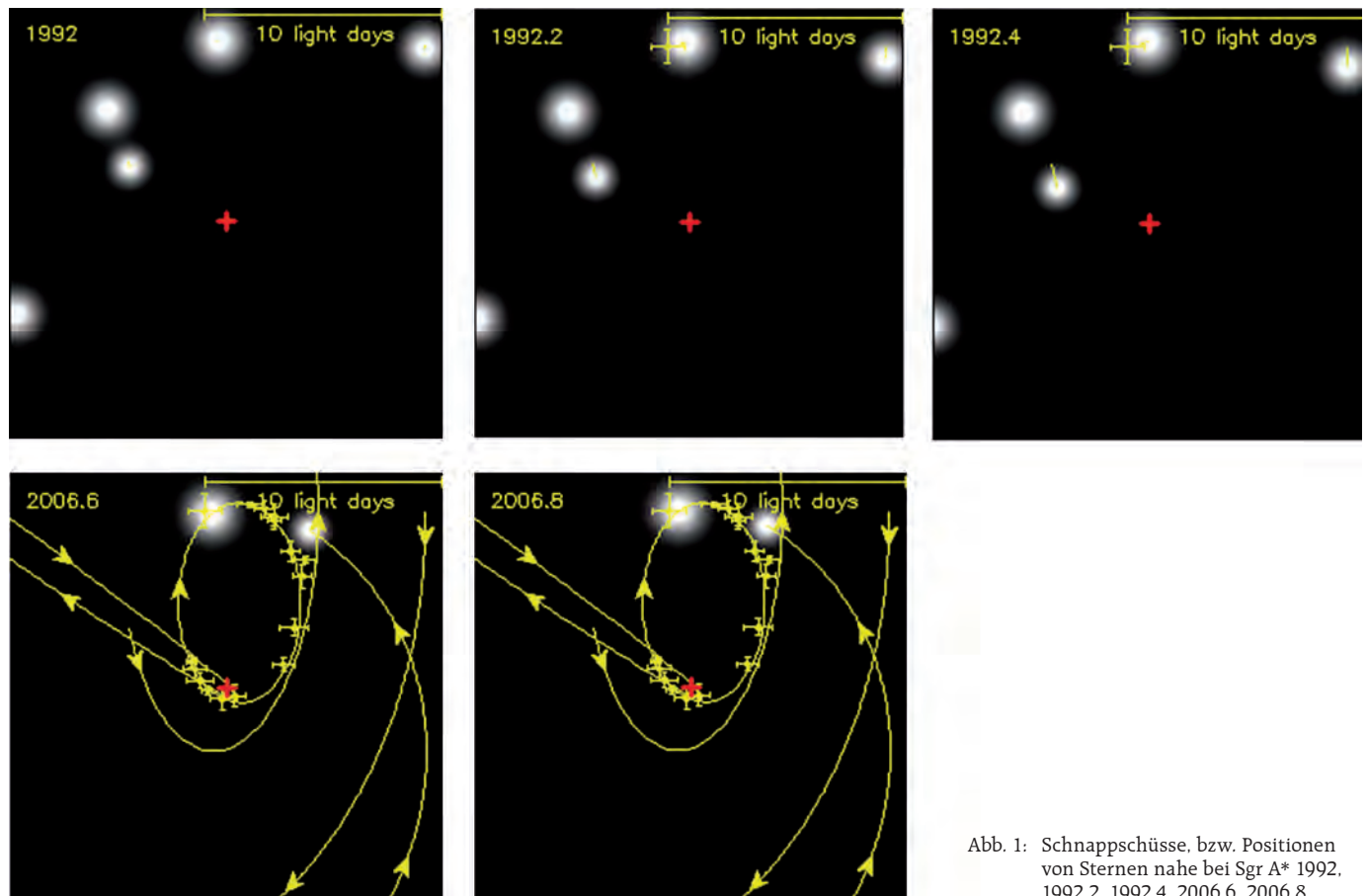
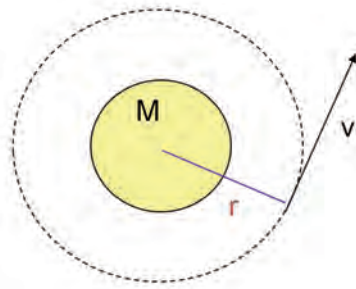


Abb. 1: Schnappschüsse, bzw. Positionen von Sternen nahe bei Sgr A* 1992, 1992.2, 1992.4, 2006.6, 2006.8

Aufgabe: Schätze mit Hilfe des dritten Keplerschen Gesetzes die Masse dieses Objekts ab! Finde eine Obergrenze für seinen Radius! Argumentiere, dass Sgr A* höchstwahrscheinlich ein schwarzes Loch ist!

Aufgabe 2: Rotation von Galaxien

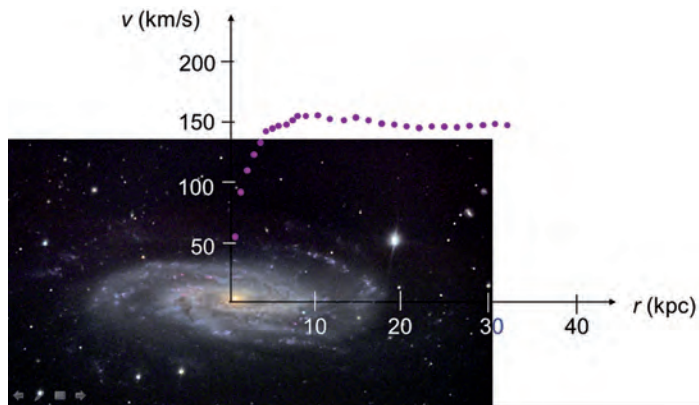
Die Rotationsgeschwindigkeit von Sternen, die „weit draußen“ um eine Galaxie kreisen, zeigt ein seltsames Verhalten: Obwohl diese



Sterne weiter vom Zentrum entfernt und damit gravitativ schwächer an die (sichtbare) Materie gebunden sind, nimmt die Rotationsgeschwindigkeit nicht ab, sondern bleibt nahezu konstant.

Zur Rotationsgeschwindigkeit von NGC 3198: G. Gentile: HALOGAS: Extraplanar gas in NGC 3198, arXiv:1304.4232 (2013)

Rotationskurve der Galaxie NGC 3198



- Argumentiere, dass die Galaxie NGC 3198 von einem „Halo“ aus dunkler (nicht sichtbarer) Materie umgeben sein muss!
- Schätze die Masse der leuchtenden Materie ab unter der Annahme, dass die dunkle Materie dort vernachlässigbar ist!
- Schätze aus der Flachheit der Rotationskurve ab, ob die Dichte der dunklen Materie nach außen hin abnimmt, zunimmt oder konstant ist. Schätze für den Bereich $20 \text{ kpc} < r < 30 \text{ kpc}$ das Dichteprofil $\rho = \rho(r)$ der dunklen Materie ab!

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 – Grobe Schätzung der Masse von Sgr A*

3. Keplersches Gesetz: $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$,

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

Die schönste Kepler-Ellipse ergibt:

$$a = 4,5 \text{ Lichttage} = 1,17 \cdot 10^{14} \text{ m}$$

und $T = 14,8 \text{ Jahre} = 4,7 \cdot 10^8 \text{ s}$.

Daher: $M = 4,3 \cdot 10^{36} \text{ kg} = 2 \text{ Mio Sonnenmassen}$
(Sonnenmasse = $2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.)

Schwarzschildradius dieser Masse: $R_{Schw} = 6 \cdot 10^9 \text{ m}$.

Maximaler Radius des Objekts:

$$5 \text{ Lichtminuten} = 1,8 \cdot 10^{11} \text{ m} = 15 R_{Schw}$$

Eine genauere Betrachtung ergibt:

Die Ellipse liegt schief (Lage des Brennpunkts) !

Scheinbare (projizierte) Ellipsengrößen:

$$a' = 4,5 \text{ Lichttage}, b' = 2,5 \text{ Lichttage}, e' = 4 \text{ Lichttage},$$

daraus die tatsächliche große Halbachse:

$$\frac{a'b'}{\sqrt{a'^2 - e'^2}} = 5,46 \text{ Lichttage}.$$

Daher ist obiges a um den Faktor 1,21, die Masse um den Faktor $1,21^3 = 1,78$ zu klein.

$$M_{korrigiert} = 2 \cdot 1,78 \text{ Mio Sonnenmassen} = 3,6 \text{ Mio Sonnenmassen (innerhalb 10 Schwarzschildradien)}$$

Aufgabe 2 – Dunkle Materie in NGC 3198

Die Kreisbahngeschwindigkeit aufgrund der leuchtenden/sichtbaren Materie beträgt:

$$v = \sqrt{G \cdot M_{leucht}/r}, \quad G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}.$$

Daher erwartet man ohne dunkle Materie einen $1/\sqrt{r}$ -Abfall der Rotationskurve am sichtbaren Rand der Galaxie. Einsetzen der Daten liefert:

$$M_{leucht} = v^2 \cdot \frac{r}{G} = 150 \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 20 \text{ kpc} \cdot \frac{1}{G} = 2 \cdot 10^{41} \text{ kg} = 10^{11} \text{ Sonnenmassen}.$$

Bleibt die Geschwindigkeit jedoch außen konstant, dann folgt aus

$$v^2 = \text{konstant} = G \cdot \frac{M(r)}{r}, \quad \text{dass } M(r) \propto r \text{ ist.}$$

Bei konstanter Dichte wäre $M(r) \propto r^3$. Daher muss die Dichte der dunklen Materie wie $1/r^2$ abnehmen

Quellen

Filme zur Bewegung von Sternen um Sgr A*: http://www.extinctionshift.com/SagittariusLensing_movie2003.gif [6.10.2014] und <http://www.eso.org/public/usa/videos/eso0846h/>. [6.10.2014]

Forschungsgruppe Infrarotastronomie – Reinhard Genzel: <http://www.mpe.mpg.de/ir>. Die vollständige aktuelle Analyse zu Sgr A*: S. Gillessen et al., Monitoring stellar orbits around the Massive Black Hole in the Galactic Center, *Astrophys. J.* 692:1075-1109, 2009, ist frei verfügbar unter arXiv:0810.4674 [6.10.2014].