Einführung des Photons am Beispiel des Fabry-Perot-Resonators

Axel Donges

Einleitung

Die Einführung des Photons im Physikunterricht erfolgt meist im Zusammenhang mit der Besprechung des Photoeffekts (obwohl der Photoeffekt auch ohne Photonen erklärt werden kann [1, S. 226-234]). In diesem Aufsatz wird ein anderer Zugang zum Photonenbegriff aufgezeigt, der sich an der Quantenelektrodynamik orientiert [2, S.38-49]. Es steht daher nicht die Wechselwirkung des Lichts mit Materie im Vordergrund.

Stehende elektromagnetische Welle

Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist die stehende Welle. Setzt man eine gewisse Vertrautheit der Schüler mit einer stehenden Seilwelle voraus, so bereitet die Diskussion der stehenden elektromagnetischen Welle keine allzu großen Schwierigkeiten.

Eine stehende Welle kann immer als Superposition von zwei Wellen aufgefasst werden, die sich nur in einer Eigenschaft unterscheiden: Sie haben entgegen gesetzte Ausbreitungsrichtungen. Für die elektrische und magnetische Feldstärke (*E* und *H*) einer in +z- bzw. -z-Richtung laufenden ebenen elektromagnetischen Welle gilt:

$$\vec{E}_{1,x} = \vec{E}_{0,x} \sin(\omega t - kz) \tag{1a}$$

$$\vec{E}_{2,x} = -\vec{E}_{0,x} \sin(\omega t + kz) \tag{1b}$$

sowie

$$\vec{H}_{1,y} = \vec{H}_{0,y} \sin(\omega t - kz) \tag{2a}$$

$$\vec{H}_{2,y} = \vec{H}_{0,y} \sin(\omega t + kz) \tag{2b}$$

Das negative Vorzeichen in Gleichung (1b) garantiert, dass das Kreuzprodukt aus elektrischer und magnetischer Feldstärke stets in Ausbreitungsrichtung weist. Zwischen den beiden senkrecht aufeinander stehenden Feldstärken $\vec{E}_{0,x}$ und $\vec{H}_{0,y}$ besteht der Zusammenhang

$$\frac{E_{0,x}}{H_{0,y}} = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}} = Z \tag{3}$$

Z heißt Wellenwiderstand. Er kann mit Hilfe der magnetischen und elektrischen Feldkonstanten μ_0 und ε_0 berechnet werden. Für das Vakuum ($\mu_r = \varepsilon_r = 1$) ergibt sich ein Wert von etwa 377 Ω. Die Superposition der beiden gegenläufigen Wellen (1) und (2) führt zu einer stehenden Welle:

$$\vec{E}_x = \vec{E}_{1,x} + \vec{E}_{2,x} = -2\vec{E}_{0,x} \sin(kz)\cos(\omega t) \tag{4a}$$

bzw.

$$\vec{H}_y = \vec{H}_{1,y} + \vec{H}_{2,y} = 2\vec{H}_{0,y} \cos(kz)\sin(\omega t) \tag{4b}$$

Das elektrische und das magnetische Feld einer stehenden Welle sind sowohl im Ort z als auch in der Zeit t um $\pi/2$ Phasen verschoben. Die Knoten/Bäuche des magnetischen Feldes fallen räumlich mit den Bäuchen/Knoten des elektrischen Feldes zusammen.

Moden eines Fabry-Perot-Resonators

Wir beschränken die weitere Diskussion auf den einfachsten Fall: Wir betrachten nicht wie üblich einen Hohlraum, sondern einen seitlich offenen optischen Resonator, der aus zwei parallel angeordneten ebenen Spiegeln besteht (Fabry-Perot-Resonator). Außerdem wird zur Vereinfachung der Einfluss der Beugung außer Acht gelassen. In diesem Fall kann das elektromagnetische Feld im optischen Resonator durch eine ebene stehende Welle beschrieben werden. Die Randbedingung, dass die elektrische Feldstärke am Ort der (ideal leitfähig angenommenen) Spiegel verschwinden muss, $E_x = 0$, schränkt die Zahl der möglichen stehenden Wellen ein. Es kommen nur solche stehenden Wellen in Frage, deren ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge der Resonatorlänge L entspricht.

$$L = m\frac{\lambda}{2} \quad \text{mit} \quad m = 1, 2, 3, \ldots . \tag{5}$$

Das bedeutet für die Kreisfrequenz bzw. die Kreiswellenzahl der möglichen stehenden Wellen:

$$\omega_m = m\frac{\pi c}{L} \quad \text{mit} \quad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{6}$$

bzw.

$$k_m = m\frac{\pi}{L} \quad \text{mit} \quad m = 1, 2, 3, \ldots . \tag{7}$$

Prof. Dr. Axel Donges unterrichte Physik an der Fachhochschule und Berufskolleg Naturwissenschaftlich-Technische Akademie Isny/Allgäu, eMail: AD@fh-isny.de

Das gesamte Strahlungsfeld im Resonator kann man sich stets durch Überlagerung der verschiedenen möglichen stehenden Wellen aufgebaut denken. Dabei ist zu berücksichtigen, dass zu jeder stehenden Welle mit der Laufzahl m zwei verschiedene Polarisationszustände existieren. Eine einzelne stehende Welle eines Resonators mit einer festgelegten Polarisationsrichtung wird als Mode oder Eigenschwingung bezeichnet.

Energie einer Mode

Die elektrische und magnetische Energie einer Mode berechnet sich durch räumliche Integration der elektrischen und magnetischen Feldenergiedichten zu

$$W_e = \varepsilon_r \varepsilon_0 E_{0,x}^2 AL \cos^2(\omega t) \tag{8a}$$

bzw.

$$W_m = \mu_r \mu_0 H_{0,y}^2 AL \sin^2(\omega t) . \tag{8b}$$

Hierbei ist A die Querschnittsfläche des Resonators. Mit Hilfe der Beziehung

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0} \tag{9}$$

erkennt man, dass die Maximalwerte der elektrischen und magnetischen Energie gleich groß sind.

$$\varepsilon_r \varepsilon_0 E_{0,x}^2 AL = \mu_r \mu_0 H_{0,y}^2 AL \tag{10}$$

Die Gesamtenergie der Mode ist zeitlich konstant. Die beiden Energieformen wandeln sich jedoch ständig (mit der doppelten Frequenz 2ω) in einander um.

$$W = W_e + W_m = \varepsilon_r \varepsilon_0 E_{0,x}^2 AL \tag{11}$$

Vergleich mit einem harmonischen Oszillator

Geht man davon aus, dass den Schülern die Physik eines ungedämpften Pendels bekannt ist, so bietet sich nun ein Vergleich der stehenden Welle mit einem Pendel an. Die Schüler werden leicht die Analogie erkennen: Wie bei einer Mode des Fabry-Perot-Resonators ist die Gesamtenergie eines ungedämpften Pendels konstant, wobei sich jedoch ständig potentielle und kinetische Energie in einander umwandeln. Dieses Ergebnis wird nicht nur bei einem Pendel, sondern auch bei anderen harmonischen Schwingern (z.B. LC-Schwingkreis) beobachtet. Eine Mode eines optischen Resonators verhält sich offenbar genau so wie ein harmonischer Oszillator. Diese Analogie erlaubt die folgende Interpretation:

Die Gesamtenergie des elektromagnetischen Strahlungsfeldes in einem optischen Resonator ist in einem unendlichen Satz von fiktiven harmonischen Oszillatoren gespeichert. Jeder Oszillator repräsentiert eine Mode (d.h. eine stehende Welle definierter Polarisationsrichtung) des optischen Resonators.

Quantisierung der Energie

An dieser Stelle setzt nun ein schmerzlicher Bruch ein, der den Schülern nicht erspart werden kann. Die klassische Physik erlaubt, dass ein harmonischer Oszillator jede beliebige Energie $W \geq 0$ annehmen kann. Die quantenmechanische Behandlung, auf die man im Schulunterricht i.d.R. verzichten muss, ergibt ein anderes Ergebnis. Die Energiewerte, die ein harmonischer Oszillator annehmen kann, sind diskret. Sie betragen

$$W_n = (n + \frac{1}{2})hf \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots . \tag{12}$$

Hierbei ist h das Plancksche Wirkungsquantum und f die Frequenz des Oszillators. Die minimale Energie, die ein harmonischer Oszillator annehmen kann, ist

$$W_0 = \frac{1}{2} hf . \tag{13}$$

Diese Energie wird Nullpunktsenergie genannt. Die Gleichung (12) beschreibt auch die Energiewerte des im vorherigen Abschnitt behandelten Federpendels. Die Energiestufen hf sind in diesem Fall jedoch unmessbar klein im Vergleich zur Gesamtenergie des Pendels. Die Quantisierung der Energie ist daher im Rahmen der klassischen Physik ohne Bedeutung, es wird ein bei $W = 0$ beginnendes, kontinuierliches Energiespektrum beobachtet.

Auf die Analogie zwischen einer Mode eines optischen Resonators und einem harmonischen Oszillator wurde bereits hingewiesen. Das Ergebnis (12) kann daher ohne Weiteres auf die Moden eines optischen Resonators übertragen werden. Die Energie, die in einer Resonatormode mit der Frequenz

$$f_m = m \frac{c}{2L} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{14}$$

enthalten ist, kann demnach nur die durch Gleichung (12) festgelegten Werte annehmen:

$$W_{m,p} = (n_{m,p} + \frac{1}{2})hf_m . \tag{15}$$

Der Energieinhalt kann nur in Vielfachen von hf_m erhöht bzw. erniedrigt werden. Die kleinste Energiestufe (Energiequant hf_m) wird Photon genannt. Ein Photon muss man sich demnach als eine über das gesamte Modenvolumen verteilte Energiemenge der Größe hf_m vorstellen. Jede Mode kann beliebig viele Photonen aufnehmen, da Photonen zu den Bosonen zählen. Die Quantenzahl $n_{m,p}$, die den Energieinhalt einer Mode beschreibt, entspricht der Anzahl der Photonen, mit denen die Mode besetzt ist. Die Gesamtenergie des elektromagnetischen Strahlungsfeldes ergibt sich, wenn die Energien aller Moden aufsummiert werden:

$$W = \sum_{p=1}^{2} \sum_{m=1}^{\infty} (n_{m,p} + \frac{1}{2})hf_m \tag{16}$$

($n_{m,p}$ =0, 1, 2, 3, ...).

Die Doppelsumme berücksichtigt, dass zu jeder Frequenz

f_m zwei Polarisationszustände existieren. Im Fall eines Lasers ist nur eine oder einige wenige Moden mit Photonen besetzt. Liegt thermisches Gleichgewicht vor, sind die Moden entsprechend dem Boltzmann-Gesetz mit Photonen besetzt [2, S.83-95]. Selbst wenn alle Moden unbesetzt sind, ergibt sich nach Gl. (16) ein unendlich großer Energiebetrag. Dies ist jedoch nicht weiter beunruhigend, da die Nullpunktsenergie dem Strahlungsfeld nicht entzogen werden kann. Auch bei Messungen können stets nur Energiedifferenzen bestimmt werden, bei denen die Nullpunktsenergie keine Rolle spielt. Wie bereits erwähnt, muss man sich ein Photon als einen über den Resonator verteilten Energiebetrag der Größe hf_m vorstellen [3]. Dem Photon kann also kein bestimmter Ort im Resonator zugeordnet werden. Eine starke Lokalisierung des Photons tritt erst dann in Erscheinung, wenn das Photon in Wechselwirkung mit Materie tritt. Befindet sich in dem Resonator ein Atom, so kann (unter geeigneten Bedingungen) das Atom das Photon absorbieren. Die zuvor im Resonator „verschmierte" Energie des Photons ist anschließend in dem Atom konzentriert.

Die hier diskutierte Feldquantisierung von stehenden elektromagnetischen Wellen erklärt auch die Feldquantiserung von laufenden Wellen, da man sich auch eine laufende Welle aus stehenden Wellen aufgebaut vorstellen kann [1, S. 88, 104-107]

$$\vec{E}_x = \vec{E}_{0,x}\sin(\omega t - kz) = \vec{E}_{0,x}\left(\sin(\omega t)\cos(kz) - \cos(\omega t)\sin(kz)\right) \qquad (17a)$$

$$\vec{H}_y = \vec{H}_{0,y}\sin(\omega t - kz) = \vec{H}_{0,y}\left(\sin(\omega t)\cos(kz) - \cos(\omega t)\sin(kz)\right) \qquad (17b)$$

Schlussbemerkungen

Die in diesem Aufsatz vorgeschlagene Einführung des Photonenbegriffs überwindet den krassen Widerspruch zwischen dem Wellen- und Teilchenbild. In dieser Darstellung wird sowohl der Wellenaspekt (stehende elektromagnetische Welle), als auch über die Energiequantisierung des harmonischen Oszillators der Quantencharakter berücksichtigt. Den Schülern kann so ein Weg aus dem Welle-Teilchen-Konflikt aufgezeigt werden bzw. ihnen bleibt von Anfang an dieser Konflikt erspart. Außerdem wird der weit verbreiteten Meinung entgegen gewirkt, dass das Photon ein punktförmiges Teilchen sei.

Literatur

[1] Kuhn W., Strnad J. (1995): *Quantenfeldtheorie - Photonen und ihre Deutung.* Braunschweig: Vieweg.

[2] Donges A. (1990): *Elementare Quantenoptik.* Heidelberg: Hüthig.

[3] Sargent III E., Scully M.O., Lamb Jr. W.E. (1974): *Laser Physics.* Reading Mass.: Addison-Wesley, S. 228

Letztes Glühen

Der online-Standard vom 23. Juni 2009 zeigt unter *http://derstandard.at/1244460472991/Fotowettbewerb-Bye-bye-Gluehbirne* 82 originelle Bilder zum Abschied von der Glühbirne. Einige Appetithappen daraus sehen Sie hier.

Stefan Leitner *„Ich habe in diesem Bild versucht, den verzweifelten Kampf der letzten Glühbirnen darzustellen. Doch wie die letzte noch leuchtende Birne zeigt, ist es nur mehr eine Frage Zeit, bis auch diese ihre Leuchtkraft für immer verlieren wird."*

F. Maurer konnte es nicht lassen. Er schickte als Foto „Die schwangere Glühbirne". Nicht das einzige Bild, das er von Glühbirnen gemacht hat:

„Ich habe vor Jahren bereits mit Versuchen begonnen, die Glühbirne zu konservieren oder sie zu züchten. Es war ein langer Weg und es bedurfte vieler Glühfäden (y) und Glaskolben (X), bis wir herausfanden, worauf es ankam. Heute sind wir in der Lage, Glühbirnen zu züchten und die Industrie kann ihre Produktion ruhig einstellen. Es wird die Glühbirne auch weiterhin geben."

P.S. *„ ... ich fotografiere seit mehr als 10 Jahren Glühbirnen in aller Welt und habe mich für meine Lieblingsgeschichte, weil tatsächlich ein Produkt, entschieden. Einige meiner Glühbirnenfotos sehen Sie unter* www.fmaurer.com>photography*"*