

Relativitätstheorie und Schwarze Löcher

Cornelia Faustmann

Im Weltjahr der Physik 2005 wird natürlich ein besonderes Interesse an Albert Einstein und seiner Relativitätstheorie geweckt. Diese Theorie spielt auch in der Physik der Schwarzen Löcher eine wesentliche Rolle. Einsteins bahnbrechende Entdeckungen bzw. die Auswirkungen seiner Theorie auf die Erklärung der Eigenschaften Schwarzer Löcher werden im Folgenden näher erläutert.

Die Veröffentlichung von Albert Einsteins Spezieller Relativitätstheorie im Jahre 1905 in der Zeitschrift „Annalen der Physik“ leitete eine neue Epoche in der Physik ein. Die damaligen Vorstellungen von Raum und Zeit wurden dadurch grundlegend verändert. Da die Minkowski-Metrik nur in Intertialsystemen eine einfache Form hat, erweiterte Albert Einstein seine Theorie und präsentierte im Jahre 1915 die Allgemeine Relativitätstheorie. Der euklidische Raumbe-griff wurde für beliebig gekrümmte Räume erweitert.

Die physikalische Raumzeit wird heute durch eine vierdimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit und ein metrisches Tensorfeld, das eine Lorentz-Signatur aufweist, dargestellt. Der Prototyp der Lorentz-Signatur ist die Minkowski-Metrik der Relativitätstheorie:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Die Kernaussage der Allgemeinen Relativitätstheorie liegt in den Einstein'schen Feldgleichungen, welche die Geometrie der vierdimensionalen Raumzeit, beschrieben durch Riemann'sche Räume, mit dem Energieinhalt dieser Raumzeit über ein System von zehn unabhängigen, nichtlinearen, gekoppelten, partiellen Differentialgleichungen in Beziehung setzen.

Bevor die Anwendung der Relativitätstheorie auf Schwarze Löcher näher erläutert wird, folgt zum besseren Verständnis eine Erklärung der Entstehung dieser Phänomene. Neben Weißen Zwergen und Neutronensternen zählen auch Schwarze Löcher zu den Endstadien von Sternen: Wenn ein Stern mit einer größeren Masse als 10 Sonnenmassen kollabiert, so kann der Druck der Neutronen der Gravitation nicht mehr das Gleichgewicht halten und der Kollaps des Sterns wird nicht mehr aufgehalten. Ein Schwarzes Loch entsteht. Der Stern fällt immer weiter in sich zusammen, bis er fast punktförmig wird. Die Fluchtgeschwindigkeit steigt stark an, und erreicht schließlich die Lichtgeschwindigkeit.

Die Fachbereichsarbeit von Cornelia Faustmann (BG Zehnergasse Wr. Neustadt) wurde 2004 von der ÖPG ausgezeichnet. Cornelia Faustmann studiert nun Astronomie.

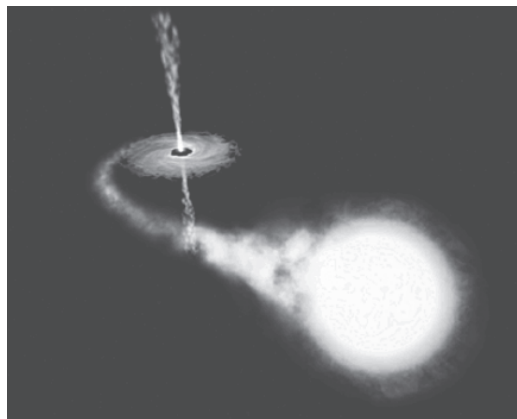
Die Fluchtgeschwindigkeit wird aus der kinetischen Energie und der Fluchtenergie berechnet. Da diese Energien gleich sein müssen, gilt folgende Gleichung:

$$\frac{m v^2}{2} = \frac{GMm}{R} \text{ bzw. } v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Beim Erreichen der Lichtgeschwindigkeit c erhält man den Schwarzschild-Radius, der nach dem deutschen Astronomen Karl Schwarzschild benannt wurde und die Grenze angibt, ab welcher kein Licht mehr entweichen kann:

$$R = \frac{2GM}{c^2}.$$

Mittels der Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie können die Eigenschaften Schwarzer Löcher besonders gut beschrieben werden.



Abbi. 1: Die Darstellung eines Schwarzen Loches.

Die erste und einfachste analytische Lösung der Feldgleichungen wurde bereits ein Jahr nach deren Aufstellung von Karl Schwarzschild im Jahre 1916 gefunden. Sie gilt für den Außenraum einer sphärischen und statischen Ladungsverteilung - die zugehörige Metrik heißt nach ihrem Entdecker Schwarzschild-Metrik.

In Kugelkoordinaten (t, R, θ, φ) lautet sie:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{R}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1} dR^2 + R^2 d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2.$$

Schwarzschilds Lösung enthält die Beschreibung der Auswirkung eines Gravitationsfelds auf Raum und Zeit in der Umgebung einer kugelförmigen Massenkonzentration. Erst

später wurde erkannt, dass die Schwarzschild-Lösung auch auf Schwarze Löcher anwendbar ist.

Entgegen der Skepsis vieler früherer Physiker, unter ihnen auch Einstein, ist heute bekannt, dass jedes hinreichend schwere, nicht rotierende Objekt zu einem vollkommen kugelförmigen Schwarzen Loch vom Schwarzschild-Typ zusammenstürzen muss.

Im Zentrum eines „Schwarzschild-Lochs“ ($R=0$) wird in jedem Koordinatensystem die Krümmung unendlich groß - dieses Phänomen wird als Singularität bezeichnet. Bei der exakten mathematischen Definition der Singularität gelangt man daher zu einem Problem. Es müssen die entsprechenden Punkte aus der Mannigfaltigkeit entfernt werden, außerdem kann der Begriff des „Ortes einer Singularität“ nicht auf einfache Weise definiert werden.

Eine Fortsetzung der Schwarzschild-Lösung für einen kleinen Radius, der dem Inneren eines Sternes entspricht, wurde im Jahre 1939 von Robert Oppenheimer ausgeführt, woraus sich schließlich die relativistische Gleichung für den Gravitationsdruck, die so genannte Oppenheimer-Volkoff-Gleichung, ergab:

$$\frac{dP}{dR} = -\frac{GM\rho}{R^2} \left(1 + \frac{P}{\rho c^2}\right) \left(1 + \frac{4\pi R^2 P}{Mc^2}\right) \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right)^{-1}$$

Der neuseeländische Mathematiker Roy Kerr fand 1963 Lösungen der Einstein'schen Gleichungen, mit denen rotierende Gasmassen beschrieben werden können. Seine Lösungen eignen sich zur Beschreibung aller Schwarzen Löcher.

Die Anwendung der Kerr'schen Lösungen auf die Schwarzen Löcher wurde unter dem „Keine-Haare-Theorem“ bekannt. Dieses Theorem ist von großem Wert für die Praxis, da es die Zahl möglicher Arten von Schwarzen Löchern erheblich einschränkt. Es besagt, dass bei der Entstehung eines Schwarzen Lochs im Zuge des Gravitationskollapses eine beträchtliche Menge an Information verloren geht. Da sich danach nur noch dessen Masse, elektrische Ladung und Rotationsgeschwindigkeit bestimmen lassen, weiß man nicht, ob der kollabierte Körper aus Materie oder Antimaterie bestand.

Das Ergebnis der Untersuchungen, die Stephen Hawking und Roger Penrose in den Jahren 1965 bis 1970 anstellten, lautete, dass es nach der Allgemeinen Relativitätstheorie eine Singularität von unendlicher Dichte und Raumzeitkrümmung in einem Schwarzen Loch geben muss, sofern $E + 3 \cdot p > 0$ ist.

Stephen Hawking stellte im Jahre 1974 fest, dass Schwarze Löcher stetige Teilchenströme zu emittieren scheinen. Bei der Untersuchung dieses Phänomens, der nach ihm benannten Hawking-Strahlung, gelang es ihm auch, einen Zusammenhang zwischen der Quantenmechanik und der Relativitätstheorie herzustellen.

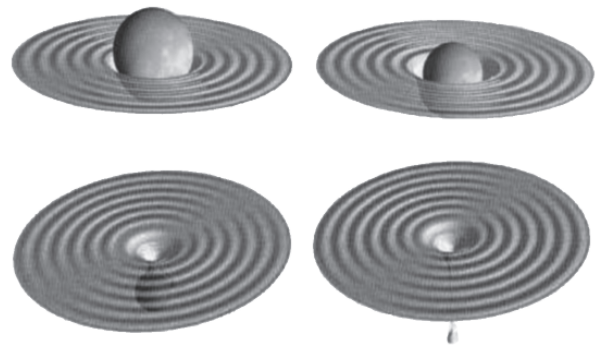


Abb. 2: Die Gravitationsimplosion führt zur Singularität des Schwarzen Loches.

Mittels der Einstein'schen Feldgleichungen konnten die Forscher Abhay Ashtekar und Badri Krishnan im Jahre 2003 genau beschreiben, wie der Horizont Schwarzer Löcher größer wird. Sie setzten die drei einzigen Eigenschaften dynamischer Schwarzer Löcher mit dem Einfall von Materie und Strahlung in Verbindung und erhielten exakte Aussagen über die Oberflächenzunahme von Schwarzen Löchern abhängig vom Einfall von Materie und gravitativer Strahlung. Die Zunahme von Masse und Drehimpuls Schwarzer Löcher, die der wichtigste Teil des Resultats war, wurde im führenden Fachblatt „Physical Review Letters“ veröffentlicht. In Fachkreisen fand diese Arbeit bereits große Anerkennung. So wurde sie bei einem Arbeitskreis über mathematische Aspekte der Relativitätstheorie im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach im Schwarzwald begeistert aufgenommen. Im Sommer 2003 startete auch ein Forschungsprogramm über diese Thematik am „Erwin Schrödinger International Institute for Mathematical Physics“ in Wien.

Manche, allerdings sehr instabile Lösungen der Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie ergeben, ausgehend vom Urknall, unter bestimmten Anfangsbedingungen Weiße Löcher als mögliche, hochspekulative Objekte, die das Gegenteil Schwarzer Löcher beziehungsweise deren „anderes Ende“ darstellen. Weiße Löcher wären demnach Objekte, aus denen Dinge entweichen, in die aber nichts hineinfallen kann. Auch die Singularitäten bilden nicht das Ende sondern den Anfang der Zeit, wodurch ein Weißes Loch dann ein in der Zeit zurücklaufendes Schwarzes Loch wäre. Diese Überlegungen entsprechen der Zeitsymmetrie der Physik, im Gegensatz zu Schwarzen Löchern gibt es jedoch bisher keine schlüssigen Beweise für Weiße Löcher. Dies liegt möglicherweise daran, dass die ausgestoßene Materie wieder zurückfallen könnte, wodurch das Weiße Loch sofort zu einem Schwarzen Loch würde. Aktuell nimmt man an, dass im Universum keine großen Weißen Löcher existieren. Auf subatomarer Ebene könnte es jedoch „Mini-Weiße-Löcher“ als Gegenpart zu Schwarzen Löchern geben.

In diesem Zusammenhang sind auch Wurm Löcher erwähnenswert. Diese können als theoretische Öffnungen in der Raumzeit betrachtet werden, durch die man sehr schnell zu weit entfernten Orten gelangen kann. Dies beruht auf einer starken Krümmung der Raumzeit, wodurch zwei ur-

sprünglich sehr weit entfernt liegende Punkte durch eine Abkürzung plötzlich nahe zusammenrücken. Da die Relativitätstheorie die Geschwindigkeit des Lichtes als natürliche Schranke annimmt, könnten Wurm Löcher zeigen, dass die lokale Einstein'sche Geschwindigkeitsbegrenzung global überwunden werden kann. Der Ausgangspunkt für die Entstehung von Wurm Löchern ist die Kruskal-Metrik, die aus der Schwarzschild-Metrik durch die maximal analytische Erweiterung erhalten wird.

Albert Einstein hat zusammen mit Nathan Rosen 1935 in einem Artikel in „The Physical Review“ die Möglichkeit der Existenz solcher Tunnel unter der Annahme einer starken Raumzeit-Krümmung dargestellt. Mit Hilfe der Koordinatentransformation formten die beiden die Schwarzschild-Lösung so um, dass darin kein Punkt vorkam, an dem Raum und Zeit endeten. In der neuen Lösung wurde die Singularität zu einer Brücke zwischen zwei Universen. Es ergab sich also ein Wurmloch, das aus zwei Schwarzen Löchern bestand, die durch die so genannte Einstein-Rosen-Brücke miteinander verbunden waren. Jedoch sah Einstein auch darin nur eine Sonderbarkeit der Mathematik der Allgemeinen Relativitätstheorie – also ein Ergebnis, das nie in der Praxis auftreten würde.

Die Einstein-Rosen-Brücken sind sehr instabil und haben nur eine äußerst kurze Lebensdauer. Ein Raumschiff könnte demnach solche Tunnel nur schwer benützen, denn die Brücken würden sich höchstwahrscheinlich in der Mitte zu Singularitäten verjüngen, was das Abreißen des Wurmloches bewirken würde - es entstehen dabei also zwei getrennte Singularitäten. Das Wurmloch bricht hiernach unter seiner eigenen Schwerkraft so schnell zusammen, dass nicht einmal Licht hindurch kommen könnte.

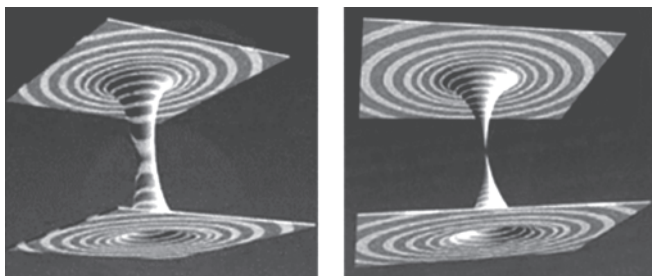


Abb. 3: Die Trennung eines Wurmlochs in zwei Singularitäten.

Um das Wurmloch stabil offen zu halten, wäre eine Raumzeitregion mit negativer Krümmung erforderlich. Eine derartige Krümmung der Raumzeit würde allerdings Materie mit negativer Energiedichte oder mit $E + 3p < 0$ erfordern, die auch exotische Materie genannt wird. Da dieser negative Druck eine abstoßende Wirkung auf Gravitation hat, könnte man mit seiner Hilfe auch den Ereignishorizont eines Schwarzen Loches öffnen und einen Blick auf die nackte Singularität werfen. Dies wird aber durch die so genannte - von Roger Penrose aufgestellte - Hypothese der Kosmischen Zensur verboten.

Einstein-Rosen-Brücken könnten auch Zeitreisen ermöglichen. Mit dieser Thematik beschäftigte sich ebenfalls Kurt Gödel: Im Gegensatz zu den Einstein-Rosen-Brücken gehen seine Theorien von geschlossenen zeitartigen Kurven aus. Das heißt also, dass man bei einer Reise durch ein Wurmloch im gleichen Universum wieder ankommt – nur zu einer anderen Zeit.

Da der Urknall mit der Explosion eines Schwarzen Lochs vergleichbar ist, besteht die Hoffnung, durch die Erforschung der Teilchenerzeugung in Schwarzen Löchern die Entstehung des Universums erklären zu können.

*Hier ist der ganze menschliche Geist,
sind Wissenschaft und Religion gefordert.
(Prof. Walter Thirring)*

Literatur

- [1] AL-KHALILI, Jim: Schwarze Löcher, Wurm Löcher und Zeitmaschinen (Spektrum, Akademischer Verlag, 2001)
- [2] FAUSTMANN, Cornelia: Entstehung und Eigenschaften Schwarzer Löcher (Fachbereichsarbeit)
- [3] HAWKING, Stephen: *Die illustrierte kurze Geschichte der Zeit* (Rowohlt Taschenbuch Verlag, 2000)
- [4] OZSVATH, Istvan / SCHUCKING, Engelbert: Gödel's trip (Am. J. Phys., Vol. 71, No. 8, August 2003)
- [5] THIRRING, Walter: *Kosmische Impressionen* (Molden Verlag, 2004)

Internet

- [1] <http://theory.gsi.de/vanhees/faq/gravitation/node30.html>
- [2] <http://www.wirtschaftsphysik.de/vorlesg/plasma/astropl.pdf>
- [3] <http://www.wissenschaft-online.de/abo/lexikon/physik/15699>
- [4] <http://www.g-o.de/kap4a/40cd0108.html>
- [5] <http://abenteuer-universum.vol4u.de/wl.html>



Cornelia Faustmann (2. v. l.) bei der FBA-Prämierung 2004 mit ihrer Lehrerin Mag. Gisela Schreiber, dem ÖPG-Vorsitzenden Univ. Prof. Dr. G. Vogl (1. v. r.) und Univ. Prof. Dr. H. Kühnelt