

# Die eingeschränkte Vorhersagbarkeit chaotischer Systeme verstehen

Reinders Duit und Michael Komorek

*Die Theorien nichtlinearer Systeme haben in den vergangenen Jahren in den Naturwissenschaften, in der Mathematik und selbst in den Sozialwissenschaften große Bedeutung erlangt. Auch in einer breiten Öffentlichkeit haben bestimmte Ideen des deterministischen Chaos und der Fraktale einige Aufmerksamkeit gefunden, nicht zuletzt durch die philosophischen und weltanschaulichen Diskussionen, die sie angeregt haben. In unserem Vorhaben geht es um zwei Ziele. Zum einen analysieren wir, welche Grundeinsichten dieser Theorien vermittelt werden sind, zum anderen untersuchen wir mit Hilfe von Lernprozessstudien, wie weit Schülerinnen und Schüler diese Einsichten verstehen. Unsere Arbeit hat sich bislang auf die eingeschränkte Vorhersagbarkeit chaotischer Systeme und auf einige Aspekte von Fraktalen, wie die Selbstähnlichkeit und das Entstehen von Dendritenstrukturen, konzentriert. Es hat sich gezeigt, dass diese Einsichten, die als wichtige Vertiefungen des Physikunterrichts anzusehen sind, bereits am Ende der SI vermittelt werden können.*

## 1. Nichtlineare Systeme als Thema des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts

Eine Reihe von Beiträgen der Zeitschrift MNU hat sich in den vergangenen Jahren mit Aspekten nichtlinearer Systeme, also mit Themen wie Chaos, Fraktale und Selbstorganisation auseinandergesetzt ([1] bis [7]). Dabei ist einerseits aus fachlicher Perspektive diskutiert worden, welche neuen Einsichten durch die Beschäftigung mit Aspekten nichtlinearer Systeme gewonnen werden können (z.B. [1] und [2]). Andererseits ist die didaktische Bedeutung dieses neuen faszinierenden Gebiets unter die Lupe genommen worden (für den Mathematikunterricht vor allem in [6]). Für den Physikunterricht gibt es einen konkreten Unterrichtsvorschlag zur "Chaos-Physik" ([4]). Damit zeigt sich in der MNU ein ganz ähnliches Bild wie in der übrigen Literatur zu fachdidaktischen Arbeiten über die Rolle von Eigenschaften nichtlinearer Systeme im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht [8]. Es gibt Artikel, in denen wissenschaftliche Erkenntnisse, die nichtlineare Systeme betreffen, für die Schule aufbereitet werden. Darin werden die Lehrkräfte über das faszinierende Verhalten dieser Systeme informiert und meist auch mit Konsequenzen für das wissenschaftliche Weltbild vertraut gemacht (s. z.B. [1] oder [9]). Weiterhin gibt es ein reichhaltiges Angebot von Experimenten und Computersimulationen zu wichtigen Aspekten von Chaos, Fraktalen und Selbstorganisation (s. z.B. [10] und [11]). Ausgearbeitete Unterrichtsvorschläge, in die diese Materialien

eingebettet sind, findet man allerdings erstaunlich selten. Erprobungen solcher Vorschläge, die im nennenswerten Maße evaluieren, inwieweit die entwickelten Experimente, Simulationen und Argumentationen von den Lernenden verstanden werden, gibt es kaum.

Das Gebiet der nichtlinearen Systeme ist also bis zu einem gewissen Grade fachlich so aufgearbeitet worden, dass auf dieser Grundlage Unterricht entwickelt werden kann. Allerdings scheint das genuin Didaktische noch zu kurz zu kommen. Überlegungen zur Frage, warum diese neuen Inhalte im Unterricht behandelt werden sollten, also Analysen zu ihrem Bildungswert, greifen häufig zu kurz (s. dazu [6]). Ob Schülerinnen und Schüler die zwar faszinierenden, aber auch recht komplexen Zusammenhänge durchschauen können, bleibt meist völlig ungeklärt.

An diesen Defiziten fachdidaktischer Arbeit greift unser Vorhaben an. Wir bemühen uns, fachliche Klärungen, Überlegungen zum Bildungswert und Untersuchungen zu Lernschwierigkeiten und -möglichkeiten eng miteinander zu verbinden. Im hier vorliegenden Beitrag konzentrieren wir uns auf Arbeiten zur Erschließung der Chaostheorie. Das Gesamtvorhaben ist Teil eines Arbeitsgebietes des Instituts für die Pädagogik der Naturwissenschaften (IPN). Zur Zeit laufen Arbeiten zur Entwicklung und Evaluation einer exemplarischen Unterrichtseinheit zur Nichtlinearen Physik für Grundkurse in der Sekundarstufe II, erste Studien zum Lernen im Bereich selbstorganisierender Systeme und Untersuchungen zum Erlernen von Aspekten fraktaler Strukturen. Bei letzteren geht es um das Prinzip der Selbstähnlichkeit, das Entstehen von Komplexität aus einfachen Bildungsgesetzen (z.B. bei der Koch-Kurve) (vgl. [22]) und um das Wachsen von Dendritenstrukturen bei einfachen Experimenten (vgl. [23]).

Unsere Arbeiten zur Chaostheorie und zu Fraktalen beschäftigen sich vor allem mit dem subtilen Zusammenspiel von Determination (also der Bestimmung von Naturvorgängen durch deterministische Gesetze) und Zufall (hier der eingeschränkten Vorhersagbarkeit des Verlaufs des Naturgeschehens durch hohe "Sensitivität" bestimmter nichtlinearer Systeme). Wir beschränken uns auf sehr einfache Systeme. Im Falle chaotischer Systeme handelt es sich dabei um so alltägliche Objekte wie Würfel oder Lottomaschine, vor allem aber um das Verhalten eines einfachen "Magnetpendels". Alle diese Systeme haben "sensitive" Stellen labilen Gleichgewichts ("Scheidepunkte", wie sie in [4] genannt werden), die für die eingeschränkte Vorhersagbarkeit verantwortlich sind.

Wir beschränken uns auf qualitative Aspekte, mathematische Berechnungen bleiben erst einmal außen vor; Untersuchungen zu "Schülvorstellungen" (s. z.B. Kapitel 6 in [12]) haben nämlich immer wieder gezeigt, wie weit die Erwartungen, was Schülerinnen und Schüler verstehen können und was sie tatsächlich gelernt haben, auseinander liegen. Wir beginnen des-

Prof. Dr. Reinders Duit und Dr. Michael Komorek, Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften an der Universität Kiel, Abteilung Didaktik der Physik, Olshausenstraße 62, 24098 Kiel, email: duit@ipn.uni-kiel.de, komorek@ipn.uni-kiel.de

Dieser Artikel basiert auf einem Vortrag gehalten auf der MNU Hauptversammlung 1999 und erschien erstmals in MNU 53/2 (2000), 94-103

halb mit einfachen und elementaren Aspekten. Bereits hier treten erhebliche Lernprobleme auf. In anderen Worten, auch das scheinbar Einfache hat sich für viele unserer Schülerinnen und Schüler als schwierig erwiesen.

## 2. Zur didaktischen Erschließung der Chaostheorie

Unsere Arbeiten zur didaktischen Erschließung nichtlinearer Systeme für den Unterricht orientieren sich an einem Modell der Didaktischen Rekonstruktion (s. Abb. 1). Kurz zusammengefaßt, geht es dabei um das bereits angesprochene Programm, Fachliches und Didaktisches eng miteinander zu verbinden (s. genauer [13]). Sachanalysen zur fachlichen Klärung sind verbunden mit didaktischen Analysen zur Bestimmung des Bildungswertes und mit empirischen Untersuchungen zum Lernen und zu Interessen der Schülerinnen und Schüler. Bereits recht früh im Prozeß der didaktischen Erschließung werden kleine Pilotunterrichtseinheiten entwickelt, erprobt und evaluiert.

Unsere Arbeiten belegen, dass das Zusammenspiel der in Abb. 1 aufgeführten Komponenten erstens fachliche und didaktische Aspekte ins Gleichgewicht zu bringen erlaubt und zweitens Lernfähigkeiten und Interessen der Lernenden von vornherein zu berücksichtigen gestattet. Es hat uns immer wieder überrascht, dass die genaue Kenntnis der Schülerperspektiven zu einer neuen Sicht auf die fachlichen Aspekte führt, zu einer Sicht durch die Vorstellungen unserer Schülerinnen und Schüler hindurch. Unter diesem Blickwinkel lassen sich die fachlichen Aspekte angemessener für den Unterricht aufarbeiten. Drittens sorgt die frühzeitige Konstruktion von Unterricht und seine Erprobung dafür, dass die didaktische Erschließung gewissermaßen auf dem Boden der Unterrichtsrealität bleibt und nicht allein für ideale Laborsituationen geeignet ist.

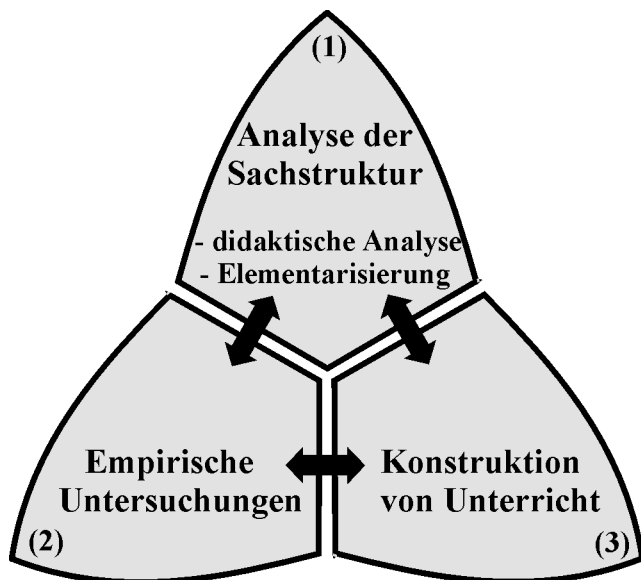


Abb. 1: Komponenten der Didaktischen Rekonstruktion

Chaotische Systeme sind zwar streng determiniert, die Vorhersagbarkeit ihres Verhaltens ist im Detail aber eingeschränkt. Bei diesen Systemen gilt das Kausalitätsprinzip, allerdings nur in der sogenannten "schwachen" Form, die behauptet, dass gleiche Ursachen immer gleiche Wirkungen haben. Die "starke" Kausalität, wonach "ähnliche" Ursachen zu "ähnli-

chen" Wirkungen führen, gilt nicht. Da diese Systeme streng determiniert sind, spricht man auch vom "deterministischen" Chaos [14]. Chaotische Systeme lassen sich durch zwei elementare Aspekte charakterisieren. Auf einer lokalen Ebene sind sie durch dynamische Instabilität gekennzeichnet [15]. Das bedeutet, dass ein System, das zweimal hintereinander mit minimal unterschiedlichen Anfangswerten startet, stark voneinander abweichende Prozesse durchläuft. Im Phasenraum betrachtet, entfernen sich benachbarte Trajektorien exponentiell voneinander (Abb. 2a). Überdies können kleinste Störungen dazu führen, dass ein System gewissermaßen auf eine andere Trajektorie springt. Chaotische Systeme sind also durch eine hohe "Sensitivität" gegenüber kleinsten Änderungen der Anfangsbedingungen und gegenüber kleinsten Störungen gekennzeichnet. Alle chaotischen Systeme haben Instabilitätsstellen (wie in Abb. 3 dargestellt), die immer wieder durchlaufen werden.

Auf einer globalen, systemischen Ebene sind chaotische Systeme durch strukturelle Stabilität gekennzeichnet (Abb. 2 b) - sie besitzen trotz dynamischer Instabilität gewisse Ordnungsstrukturen im Phasenraum. Diese Strukturen werden chaotische Attraktoren genannt; Trajektorien aus der Umgebung streben auf diese Attraktoren zu und schmiegen sich ihnen asymptotisch an. Die Attraktoren stehen also für die "Ordnung im Chaos". Sie haben in der Regel fraktale Struktur.

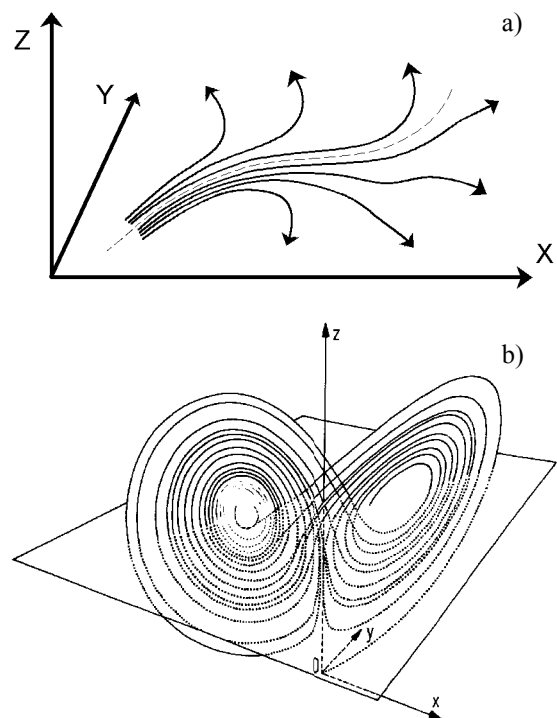


Abb. 2: Dynamische Instabilität (a) und strukturelle Stabilität (b) chaotischer Systeme

Dynamische Instabilität und strukturelle Stabilität sind komplementäre Aspekte, sie bedingen sich gegenseitig. Chaotische Systeme sind gewissermaßen im doppelten Sinne determiniert: Auf der lokalen Ebene durch die Differentialgleichungen, die zu bestimmten Trajektorien führen, auf der globalen Ebene durch dieselben Differentialgleichungen, die hier chaotische Attraktoren hervorbringen. Aufgrund dieser doppelten Determination kann man von einer eigenständigen Form des Determinismus, dem "Chaotischen Determinismus" reden (s. [16]).

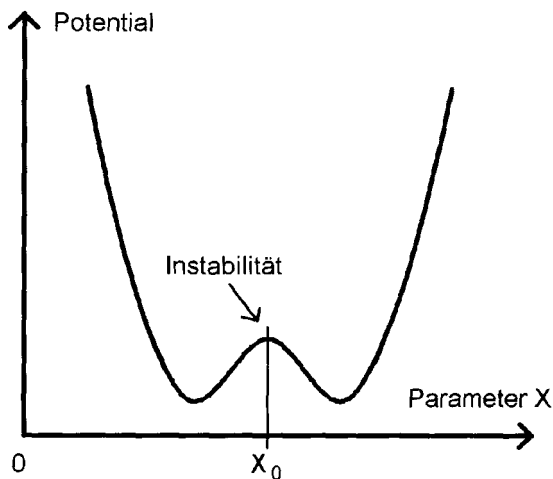


Abb. 3: Prinzipieller Potentialverlauf bei chaotischen Systemen

Wie bereits erwähnt, haben wir uns auf die elementaren Ideen der Chaostheorie konzentriert. Wir wollten zunächst erkunden, inwieweit diese elementaren Einsichten vermittelbar sind, bevor wir uns den physikalisch anspruchsvolleren Aspekten zuwenden. Aus diesem Grunde schied der Aspekt der "Ordnung im Chaos" erst einmal aus; dieser läßt sich nur dann einsichtig machen, wenn es gelingt, das Phasenraumkonzept angemessen zu vermitteln. Die Entscheidung für den Aspekt der eingeschränkten Vorhersagbarkeit hat einen weiteren wichtigen didaktischen Grund. Überlegungen zum Beitrag der Vermittlung der Chaostheorie zu einer naturwissenschaftlichen Allgemeinbildung haben uns zur Auffassung geführt, dass der Aspekt der eingeschränkten Vorhersagbarkeit ebenso wichtig ist wie der Aspekt der Ordnung im Chaos, obwohl letzterer innerwissenschaftlich die größere Aufmerksamkeit erfahren hat. Im Physikunterricht, so scheint es, wird der Aspekt der Berechenbarkeit des Naturgeschehens sehr stark betont, wenn nicht überbetont. Die Beschäftigung mit chaotischen Systemen zeigt den Schülerinnen und Schülern, dass die Berechenbarkeit, also die exakte Vorhersagbarkeit des zukünftigen Verhaltens bei einigen - auch sehr einfachen - Systemen eingeschränkt ist. Die intensive Beschäftigung mit der eingeschränkten Vorhersagbarkeit chaotischer Systeme stellt also einen "naiven" Determinismus, von dem viele Schülerinnen und Schüler ausgehen, in Frage. Unsere Studien zeigen, dass es bereits im 10. Schuljahr möglich ist, die eingeschränkte Vorhersagbarkeit bestimmter Systeme verständlich zu machen und mit Schülerinnen und Schülern erstaunlich tiefe Gespräche über ihre Determinismuskonzepte zu führen.

### 3. Eine Unterrichtseinheit zur eingeschränkten Vorhersagbarkeit chaotischer Systeme im 10. Schuljahr

#### Zur Sachstruktur

In unserer Unterrichtseinheit dient ein Magnetpendel als Prototyp eines chaotischen Systems. Eine kleine Eisenkugel schwingt an einem Faden über drei symmetrisch angeordnete Magneten. Der Zielmagnet, über dem die Kugel zur Ruhe kommt, läßt sich nicht vorhersagen, auch wenn versucht wird, die Kugel bei jedem Durchgang nach Möglichkeit genau vom gleichen Punkt seitlich der Magneten zu starten. Dies liegt daran, dass die anziehenden Kräfte zum linken und rechten

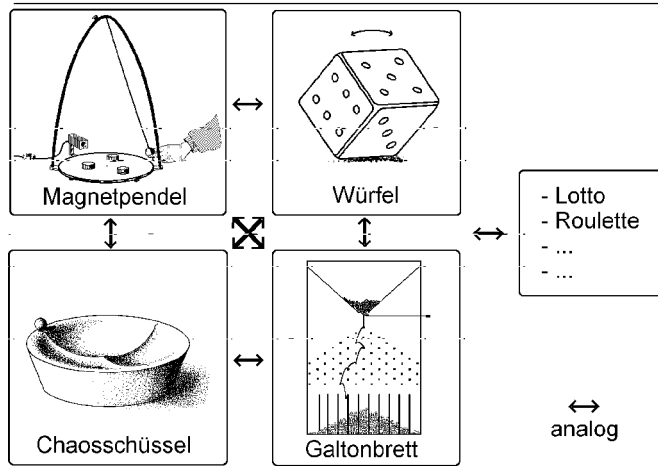
Magneten auf den drei Linien genau zwischen ihnen gleich groß sind. Sie bilden einen dreizähligen Stern, den Schülerinnen und Schüler "Mercedesstern" oder "Y" genannt haben. Bei diesem Stern handelt es sich um Bereiche labilen Gleichgewichts, die man als Wall oder Berggrat verstehen kann (vgl. die Elementaranalogien unten in Abb. 4). Bei ihrer Bewegung passiert die Eisenkugel die Zonen labilen Gleichgewichts sehr häufig. Aufgrund dieser Zonen wird die Bahn der Eisenkugel minimal verändert, weil man sie nie zweimal genau vom gleichen Punkt aus starten kann und weil kleine Störungen während des Laufs auftreten. Beim Passieren dieser Zonen kann einer der Fälle eintreten, die in Abb. 4 unten (bei den Elementaranalogien) skizziert sind. Die Kugel läuft so auf einen Grat zu, dass kleinste Änderungen der Bahn darüber entscheiden, ob sie nach links oder rechts hinunterläuft oder ob sie es gerade noch schafft, den Wall zu passieren. Zwei minimal unterschiedliche Bahnen entwickeln sich von da an unterschiedlich. Bei dieser Erklärung handelt es sich um eine Vereinfachung in didaktischer Absicht, denn starke Nichtlinearitäten, die "Wälle" bzw. "Grate" hervorrufen, sorgen dafür, dass bereits kleine Differenzen zwischen dicht beieinander liegenden Bahnen überproportional verstärkt werden. Der Einfachheit halber betrachten wir gewissermaßen nur die stärkste Nichtlinearität an der Stelle des labilen Gleichgewichts (zur Physik des Magnetpendels s. [16]).

Die Beispiele für chaotische Systeme, die im unten beschriebenen Unterricht eingesetzt werden (Abb. 4) weisen sämtlich sensitive Zonen labilen Gleichgewichts auf, die mehrfach

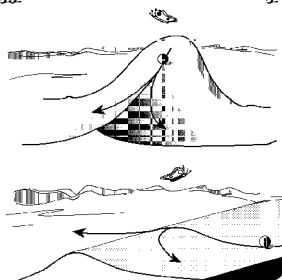
#### Prinzip: Eingeschränkte Vorhersagbarkeit trotz deterministischer Bestimmtheit

##### Begriff: Chaotisches System

- \* Verhalten des Systems nur für kurze Zeit vorhersagbar
- \* Kleine Änderungen der Startbedingungen und kleine Störungen wirken sich stark aus
- \* Sensitive Zonen labilen Gleichgewichts werden wiederholt durchlaufen



#### Berggrat und Wall als Elementaranalogien



#### Physikwissen:

stabiles/labiles Gleichgewicht

Magnetfelder

Kraft und Bewegung

#### Alltagswissen

Gesetz und Zufall

»Gleiche Ursachen haben gleiche Wirkungen«

Abb. 4: Zur Sachstruktur der Unterrichtseinheit über die eingeschränkte Vorhersagbarkeit chaotischer Systeme

durchlaufen werden. Beim Würfel sind es die Kanten, über die er abrollt, beim Galtonbrett die Nägel, auf die Kügelchen auf treffen. Ein Analogmodell für das Magnetpendel stellt die Chaosschüssel dar. Bei allen diesen Systemen handelt es sich um sogenannte "transient" chaotische Systeme, die nicht "unendlich" lange in Bewegung sind, wie es bei den Systemen der Fall ist, mit denen sich die Theorie des deterministischen Chaos beschäftigt [14]. Mit ihrer Hilfe läßt sich aber das Ziel des Unterrichts erreichen, nämlich den Begriff des chaotischen Systems, wie er oben in Abb. 4 umrissen ist, herauszuarbeiten. Dieser Begriff schließlich dient als Schlüssel, um das Prinzip von der eingeschränkten Vorhersagbarkeit dieser Systeme zu verstehen und so den naiven Determinismus der meisten Schülerinnen und Schüler herauszufordern.

## Unterrichtsverlauf

Wir versuchen, den Schülerinnen und Schülern so viel Gelegenheit wie möglich zu geben, das Verhalten der chaotischen Systeme selbst aufzuklären. Wir sind überzeugt davon, dass nur das "wirklich" verstanden wird, was sich die Lernenden in eigener aktiver Auseinandersetzung erarbeiten. Deshalb wird der Unterricht zu einem erheblichen Teil in Gruppenarbeit (Gruppengröße vier bis fünf Schülerinnen und Schüler) durchgeführt. Damit die eigenständige Arbeit in den Gruppen nicht in unerwünschte Richtungen verläuft, gibt die Lehrkraft eine Reihe von Hilfen, z.T. durch Arbeits- und Informationsbögen. Die Unterrichtseinheit gliedert sich in fünf Abschnitte, für die jeweils eine Unterrichtsstunde nötig ist.

### (1) Beobachtung des merkwürdigen Verhaltens des Magnetpendels

Das Pendel wird der Klasse vorgestellt. Es wird gefragt, wie die Bahnen aussehen, wenn die Pendelkugel losgelassen wird. Der Versuch wird durchgeführt. In aller Regel liegen die Voraussagen und die Beobachtungen weit auseinander. Nun wird gefragt, was geschehen wird, wenn das Pendel erneut von der gleichen Stelle aus gestartet wird. Anschließend erforschen Schülerinnen und Schüler in ihren Gruppen, ob die Reihenfolge der Zielmagnete zufällig ist oder nicht. Viele Gruppen meinen, es müsse sich irgendeine Regelmäßigkeit zeigen, da doch alles gleich bleibt. Sie machen viele Versuche, können letztlich aber keine Regelmäßigkeit entdecken.

### (2) Untersuchung der Kräfte, die auf die Pendelkugel wirken

Die Kräfte, die auf die Pendelkugel einwirken, werden aufgelistet. Es bereitet den Schülerinnen und Schülern hier erstaunlich große Mühe zu erkennen, dass an jedem Punkt der Bahn die drei Magneten und die Gravitationskraft auf die Pendelkugel einwirken. Es werden hier Vorstellungen deutlich, die aus Untersuchungen zu "Schülvorstellungen" gut bekannt sind. So wird gar nicht selten nur die jeweils stärkste auf die Kugel wirkende Kraft in Betracht gezogen. Auch endet für manche Schülerinnen und Schüler das Magnetfeld des einen Magneten dort, wo es mit einem anderen Magnetfeld zusammentrifft. Bei der Erklärung der Bahn der Kugel unter der Einwirkung der Kraft werden häufig eine "Kraft" in Richtung der Bewegung und die stärkste gerade wirkende Kraft miteinander verrechnet.

Schülerinnen und Schüler untersuchen die Stärke und Richtung der Kräfte an verschiedenen Stellen mit einer kleinen Eisenkugel an einem Faden und tragen ihre Ergebnisse auf einer Folie ein. Es ergeben sich Bereiche gleicher Kraft nach links

und rechts zu den jeweiligen Magneten hin. Diese Figur zeigt sich auch in einem Eisenfeilspanbild. Der sternförmige Bereich wird als "Mercedesstern" bzw. als "Y" bezeichnet. Es bereitet den Lernenden Schwierigkeiten, diese Linien als Zonen labilen Gleichgewichts zu erkennen. Eine Reihe von ihnen sieht diese Linien als "kräftefreie" Zonen an, in denen sich nach ihrer Auffassung folglich kleine Störungen besonders gut auswirken können.

### (3) Auf der Suche nach einer Deutung des chaotischen Verhaltens

In Gruppen bemühen sich die Schülerinnen und Schüler um eine Deutung des chaotischen Verhaltens auf der Basis des entwickelten Wissens über die "Struktur des Feldes", in dem sich das Magnetpendel bewegt. Nach einiger Zeit gibt die Lehrkraft den Gruppen die Chaosschüssel mit der Aufforderung zu überlegen, ob ihnen das Verhalten der Kugel in dieser Schüssel hilft, das Verhalten des Magnetpendels zu verstehen. Die "Wälle" und "Berggrate", die man sich beim Magnetpendel nur denken kann, sind bei der Chaosschüssel anschaulich zu sehen und mit den Händen zu "begreifen". Um das Verhalten der Kugeln bei der Chaosschüssel und beim Pendel verständlich zu machen, werden den Gruppen die in Abb. 4 gezeigten Elementaranalogien (Berggrat und Wall) als Bilder vorgelegt. Wiederum werden sie aufgefordert, sich zu überlegen, ob ihnen diese Bilder helfen können, das Verhalten des Magnetpendels (und der Chaosschüssel) zu verstehen. Es hat sich gezeigt, dass die meisten Gruppen große Mühe haben zu erkennen, inwiefern die Zonen des labilen Gleichgewichts das chaotische Verhalten verursachen. Es ist interessant zu sehen, wie die Schülerinnen und Schüler mit den ihnen vorgelegten Analogien umgehen. Diese werden keineswegs spontan verstanden. Es ist vielmehr so, dass sich ein Verständnis des Magnetpendels und des Analogexperiments Schritt für Schritt gewissermaßen simultan entwickelt. Die Schülerinnen und Schüler wechseln häufig die Perspektive, d.h. sie versuchen, das Pendel von der Chaosschüssel ausgehend zu verstehen und umgekehrt.

### (4) Computersimulation - Programm "MagPen"

Viele Schülerinnen und Schüler unterscheiden bei ihren Erklärungsversuchen zum Magnetpendel das Verhalten in der Realität von dem in einer "idealen" Welt. Sie argumentieren zum Beispiel, dass sich genau die gleichen Bahnen ergeben werden, wenn man immer vom gleichen Punkt aus startet und wenn es keine Störungen gibt. Das Verhalten des Magnetpendels in einer solchen "idealen Welt" wird mit Hilfe eines Simulationsprogramms in Zweiergruppen eigenständig erforscht. Es bereitet den Schülerinnen und Schülern keine Probleme, den Status des Simulationsprogramms zu verstehen. Sie akzeptieren es spontan als Illustration des chaotischen Verhaltens des Magnetpendels in einer idealen Welt. Das Programm erlaubt es, den Startpunkt beliebig zu wählen und mehrere Bahnen nacheinander zu zeichnen. Wenn man zum Beispiel zunächst eine Bahn zeichnen läßt und dann den Startpunkt so wenig ändert, wie es das Programm erlaubt, so sind die beiden Bahnen am Anfang noch ganz ähnlich, bis die neue Bahn plötzlich völlig anders weiter verläuft. Es zeigt sich, dass das Programm den Schülerinnen und Schülern hilft, die bisher gewonnenen Einsichten zur Funktion des Magnetpendels zu klären und zu vertiefen. Es gibt hier ein ganz ähnliches Umgehen mit dem Simulationsprogramm wie es oben beim Verwenden

von Analogien berichtet worden ist. Die Schülerinnen und Schüler gehen einerseits vom Realexperiment aus und fragen sich, wie sie ein bestimmtes Verhalten des Magnetpendels simulieren können, und überlegen sich andererseits, wie eine Simulation mit dem Programm in der Realität aussehen würde. Dieses ständige Wechseln der Perspektive scheint wesentlich zum besseren Verständnis des Magnetpendels beizutragen. (Das Programm wird auf Nachfrage kostenlos abgegeben).

#### *(5) Begriffe "Chaotisches System" und "Prinzip der eingeschränkten Vorhersagbarkeit"*

Im abschließenden Abschnitt geht es um die Verallgemeinerung des bisher am Beispiel des Magnetpendels Erkannten. Zwar ist dieser Abschnitt bei straffer Führung durch die Lehrkraft in einer Unterrichtsstunde zu schaffen. Es ist aber zu empfehlen, sich mehr Zeit zu nehmen, da erst an dieser Stelle die so wichtigen "philosophischen" Gespräche über Vorhersagbarkeit und ihre Einschränkungen möglich sind. Zunächst werden die Kennzeichen chaotischer Systeme herausgearbeitet. Schülerinnen und Schüler "erfinden" dann in ihren Gruppen ein neues chaotisches System. Es zeigt sich in diesem Unterrichtsabschnitt, dass die bisher gewonnenen Einsichten weiterer Ausschärfung bedürfen. Die Diskussion verschiedener chaotischer Systeme leistet hier einen wichtigen Beitrag. In unseren Aufzeichnungen finden wir zum Beispiel viele Belege, dass Erkenntnisse, die an einem neuen chaotischen System gewonnen werden, in ihrer Rückübertragung auf das Magnetpendel zu einem vertieften Verständnis dieses Versuchs führen. Es ist an dieser Stelle reizvoll, die Schülerinnen und Schüler nach chaotischen Systemen in ihrer Umwelt suchen zu lassen. Wir waren immer wieder überrascht, wie einfallreich manche Schülerinnen und Schüler ihre neu gewonnenen Einsichten anwendeten. So erläuterte uns ein Mädchen, dass es nicht genau möglich sei zu sagen, wo ein Blatt landen wird, das bei Windstille von einem Baum fällt, weil gewissermaßen Zufall und Gesetzmäßigkeit unvorhersehbar zusammenwirken. Ein Junge beschrieb, dass man die Bahn eines Wassertropfens, der eine Glasscheibe herunterläuft, nicht genau vorhersagen kann, weil kleinste Verunreinigungen der Scheibe (z.B. durch Fett) dem Tropfen eine andere Bahn als senkrecht nach unten aufnötigen.

Mit diesen fünf Unterrichtsabschnitten ist eine Grundlage gelegt, das Thema durch interessante Anwendungen von Ideen der Chaostheorie zu vertiefen. So kann man Experimente mit ganz anderen chaotischen Systemen (z.B. mit nichtlinearen elektrischen Bauelementen; s. z.B. [17]) anschließen oder darüber sprechen, inwieweit das Wetter oder das Planetensystem chaotische Systeme sind.

#### **4 Ergebnisse zum Verstehen der eingeschränkten Vorhersagbarkeit**

Die vorstehend skizzierte Unterrichtseinheit ist mehrfach in Kiel (in Zusammenarbeit mit W. M. Roth) und in Wien (in Zusammenarbeit mit H. Stadler) erprobt worden<sup>\*)</sup>. Bei diesen

<sup>\*)</sup>Die Kieler Erprobungen konnten wir im Gymnasium Wellingdorf durchführen. Wir sind der Schulleitung und Frau StRin Bobertz und Herrn StR Knieling sehr dankbar, dass wir in ihren Klassen arbeiten durften. Die Erprobung in Wien fand am Gymnasium "Am Laaer Berg" statt. Frau Prof. Mag. Helga Stadler unterrichtet dort Physik. Die Wiener Untersuchung wurde von ihr und Reinders Duit durchgeführt.

Erprobungen haben wir die Lernprozesse der Schülerinnen und Schüler im Detail untersucht. Der Unterricht im gesamten Klassenverband und in einigen Gruppen wurde jeweils auf Videoband aufgezeichnet und anschließend verschriftlicht. Weiterhin liegen Ergebnisse von Eingangs- und Abschlußfragebögen sowie von Interviews vor, die wir nach Abschluß des Unterrichts mit einigen Schülerinnen und Schülern geführt haben. Diese Ergebnisse können hier nicht im Detail wiedergegeben werden (vgl. dazu [18] bis [21]).

#### **Verstehen chaotischer Systeme**

Unsere Studien belegen, dass es bereits im 10. Schuljahr möglich ist, Schülerinnen und Schülern den Begriff chaotisches System so zu vermitteln, dass sie ihn zur Erklärung einer Klasse von Experimenten und Phänomenen anwenden können. Auch gelingt es, die Vorstellungen vieler Schülerinnen und Schüler von der Vorhersagbarkeit in der Physik zu revidieren. Sie erkennen, dass es Systeme gibt, unter ihnen erstaunlich einfache, deren zukünftiges Verhalten nicht vorausgesagt werden kann, obwohl sie deterministischen Gesetzen unterliegen. Den meisten Schülerinnen und Schülern werden also mit unserem Unterricht neue Denkweisen vermittelt, die eine gute Basis für das Verständnis interessanter Anwendungen der Chaostheorie sind. Bei der Erprobung in Wien ergab sich zum Beispiel die Gelegenheit, mit den Schülerinnen und Schülern im Anschluß an unseren Unterricht eine "Chaosausstellung" zu besuchen. Obwohl diese Ausstellung didaktisch eher ungeschickt war und auch von den jungen Führern schlecht präsentiert wurde, zeigten Antworten in den Interviews, dass die im Unterricht vermittelten Denkweisen und Einsichten es den Schülerinnen und Schülern erlaubten, überraschend viel aus der Ausstellung mitzunehmen.

#### **Interesse am Unterricht**

Eine weitere Erfahrung während unserer Erprobungen scheint uns bemerkenswert zu sein. Der Unterricht stieß bei den meisten Schülerinnen und Schülern auf sehr großes bis gutes Interesse. Natürlich muß man bei solchen Erprobungen, die auch mit einem gewissen technischen Aufwand verbunden sind (Videokameras, die den Unterricht aufzeichnen; Fragebögen und Interviews, in denen die Schülerinnen und Schüler Gelegenheit haben, sich auch zum Unterricht zu äußern), in Rechnung stellen, dass sie als Abwechslung des Unterrichtsalltags ein gewisses Interesse hervorrufen. Unbeschadet dessen war das große Engagement vieler Schülerinnen und Schüler in der Gruppenarbeit einerseits durchaus auf Interesse am Thema zurückzuführen, andererseits auf die Möglichkeit, sich in den Gruppen aktiv am Unterrichtsgeschehen beteiligen zu können. Anzufügen ist, dass in unseren Erprobungen viele Mädchen sehr viel aktiver und engagierter waren, als man es ansonsten im Physikunterricht erlebt.

In Interviews haben uns einige der Befragten erklärt, unser Unterricht sei gar kein "richtiger" Physikunterricht gewesen. Auf unsere erstaunte Frage, was sie damit meinten, haben die Befragten etwa wie folgt geantwortet. Dieser Unterricht folge nicht dem eingefahrenen Schema, ein Experiment vorgeführt zu bekommen, Messungen durchzuführen, Meßergebnisse auszuwerten, eine Formel zu entwickeln und diese dann anzuwenden. Hier sei es ja um die Erklärung eines Experiments gegangen. Natürlich gab es unterschiedliche Meinungen, ob die

lange Zeit, die man mit der Sache gerungen hatte, gut angelegt war.

### Verständnisschwierigkeiten

Es ist bei der Beschreibung des Unterrichtsverlaufs bereits auf eine Reihe von Verständnisschwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler hingewiesen worden. Deutlich wurde zunächst, dass die im Unterricht bereits behandelten Inhalte keineswegs ohne Probleme verfügbar waren. In aller Regel griffen die Schülerinnen und Schüler eher auf Alltagsvorstellungen als auf im Unterricht behandelte physikalische Vorstellungen zurück, wenn es z.B. um das Zusammenwirken von Kräften, um Magnetfelder und labiles Gleichgewicht ging. Aus der Literatur zu "Schülervorstellungen" ist dies bestens bekannt (s. Kapitel 6 in [12]). Obwohl wir am Ende des Unterrichts bei den meisten Schülerinnen und Schülern ein recht weit ausgebautes Verständnis der eingeschränkten Vorhersagbarkeit gefunden haben (s.o.), muß allerdings eingeräumt werden, dass rund die Hälfte von ihnen nur oberflächlich verstanden hat, *wie* die sensitive Zonen labilen Gleichgewichts zur eingeschränkten Vorhersagbarkeit führen. Sie sehen nicht oder nur in Ansätzen, dass kleine (unvermeidliche) Änderungen des Startpunkts und kleine (unvermeidliche) Störungen während des Laufs dazu führen, dass die Bahnen zweier Versuche zunächst noch eng beieinander bleiben, dann aber "exponentiell" auseinander laufen. Viele der Befragten waren auch nach dem Unterricht noch der Meinung, nur (oder vorwiegend) solche Störungen hätten eine Wirkung, die genau in den labilen Gleichgewichtszonen auftreten, weil die Kugel dort "kräftefrei" und somit besonders empfindlich für kleine Störungen sei. Wahrscheinlich ist dieser Effekt auf ein Defizit des Unterrichts zurückzuführen. Dort haben wir nicht im Einzelnen verfolgt und diskutiert, wie sich zwei Bahnen, die von etwas unterschiedlichen Startpunkten beginnen und dann auch noch kleinen Störungen ausgesetzt sind, weiterentwickeln.

Es gibt eine Reihe von Befunden in unseren Untersuchungen, die über den Unterricht zur Chaostheorie hinaus von Interesse sein dürften. Wir beschränken uns hier auf zwei Beispiele. Bei der Untersuchung des Kraftfeldes, in dem sich die Kugel des Magnetpendels bewegt (s. oben den zweiten Unterrichtsabschnitt), haben die Schüler spontan den "Stern", der die Zonen labilen Gleichgewichts ausmacht, als "Mercedesstern" bezeichnet. Der Lehrer hat diese Bezeichnung aufgenommen und im weiteren Verlauf als Kennzeichen chaotischer Systeme verwendet. Der Mercedesstern stand also für die Zonen labilen Gleichgewichts. Aber nicht alle Schülerinnen und Schüler haben diese abstrakte Bedeutung mit dem Ausdruck verbunden. Manche verbanden damit die geometrische Struktur, häufig ohne jeden Bezug zur Idee des labilen Gleichgewichts. So war eine Schülerin der Meinung, das Galtonbrett (s. in Abb. 4) sei ein chaotisches System, weil es dort Mercedessterne gäbe. Sie meinte damit die Y-artige Anordnung der Nägel und nicht die Idee des labilen Gleichgewichts auf den Nägeln, wenn sie von den kleinen Kügelchen getroffen werden (s. [19]). Bei der Planung unserer Unterrichtseinheit waren wir davon ausgegangen, dass Schülerinnen und Schüler die unten in Abb. 4 gezeigten Elementaranalogien ohne gewisse Schwierigkeiten verstehen würden. Wie bereits oben kurz erwähnt, hatten sie aber große Schwierigkeiten zu erkennen, was auf den Bildern zu sehen ist. Sie interpretierten zum Beispiel den Schmetterling, der für uns für kleine Störungen stand, als Windanzeiger

oder schlicht als Dekoration. Es wird hier klar, dass die Schülerinnen und Schüler Experimente, die wir ihnen zeigen, Bilder, die wir ihnen vorlegen, Erklärungen, die wir ihnen geben, ihren *eigenen* Sinn geben. Sie gehen eben mit anderen Vorstellungen als wir an die Interpretation der Lernhilfen heran.

### Resümee

Mit dem heutigen Stand unserer Arbeiten glauben wir, belegen zu können, wie Chaostheorie dem bisherigen Kanon von Unterrichtsinhalten einige Aspekte hinzufügen kann, die bisher kaum zur Sprache gekommen sind. Dies betrifft vor allem das subtile Zusammenspiel von Zufall und Gesetzmäßigkeit, das bei nichtlinearen Systemen eine Rolle spielt und somit eine große Anzahl von Naturerscheinungen adäquat zu beschreiben erlaubt. Diese Gedankengänge scheinen - freilich auf einem qualitativen Niveau - durchaus bereits am Ende der Sekundarstufe I vermittelbar zu sein. Dabei kommt es uns nicht darauf an, das Verhalten bestimmter chaotischer Systeme im Unterricht zu erklären, sondern es geht uns vielmehr um Einsichten über die "Natur des Naturgeschehens", die diese Systeme verdeutlichen. Es geht auch um die Klärung des Begriffs Zufall selbst. Schülerinnen und Schüler haben in der Regel Vorstellungen von diesem Begriff, die den wissenschaftlichen Vorstellungen nicht gerecht werden. So versteht eine Reihe der von uns Interviewten den Zufall als eine eigenständige Kausalursache - und damit ist dann ihr naiver Determinismus gerettet. Aus unserer Sicht lohnt es sich damit durchaus, über Aspekte chaotischer Systeme zu unterrichten, und es lohnt sich, ihren Bildungswert und ihre Vermittelbarkeit zu untersuchen.

### Literatur

- [1] H. J. Schlichting: Schöne fraktale Welt - Annäherung an ein neues Konzept der Naturwissenschaften. *MNU* 45 (1992) 4, S. 202 - 214.
- [2] H. J. Schlichting: Energie, Entropie, Synergie - Ein Zugang zur nichtlinearen Physik. *MNU* 46 (1993) 3, S. 138-148.
- [3] Chaos und Fraktale - in ihrer Bedeutung über- oder unterschätzt? Diskussion mit Beiträgen von H. O. Peitgen (Mathematik ohne Berührungsängste) und K. Steffen (Chaos, Fraktale und das Bild der Mathematik in der Öffentlichkeit). *MNU* 47 (1994) 4, S. 240-245.
- [4] R. J. Brandenburg: Chaos-Physik in Gruppenarbeit. *MNU* 47 (1994) 5, S. 292-302.
- [5] C. Morgenstern: Realisieren der fraktalen räumlichen Geometrie vom Standpunkt der Ästhetik. *MNU* 47 (1994) 5, S. 302-305.
- [6] H. G. Bigalke: Chaostheorie und Fraktale Geometrie im Mathematikunterricht? *MNU* 49 (1996) 1, S. 40-52.
- [7] H. J. Schlichting - V. Nordmeier: Strukturen im Sand - Kollektives Verhalten und Selbstorganisation bei Granulaten. *MNU* 49 (1996) 6, S. 323-332.
- [8] M. Komorek: *Bibliographie zur Chaostheorie*. - Kiel: IPN 1996.
- [9] M. Euler: Gekoppelte Uhren und kognitive Prozesse: Lineare und nichtlineare Prinzipien in der internen Informationsdynamik. *Physik in der Schule* 32 (1994), S. 72-76.

- [10] H. J. Schlichting - U. Backhaus - H. G. Küpker: Chaos beim Wasserrad - ein einfaches mechanisches Modell für das Lorenz-System. *Physik und Didaktik* 19, S. 126-129.0
- [11] B. Vongxaya - J. Weißbart: Nichtlineare Schwingungen - ein computergestütztes Lernprogramm für Ingenieurstudenten des ersten Studienjahres. In: *Deutsche Physikalische Gesellschaft: Didaktik der Physik, Vorträge*. DPG GmbH: Esslingen (1993) S. 671-678
- [12] P. Häussler - W. Bündler - R. Duit - W. Gräber - J. Mayer: *Naturwissenschaftsdidaktische Forschung: Perspektiven für die Unterrichtspraxis*. Kiel: IPN.
- [13] U. Kattmann - R. Duit - H. Gropengiesser - M. Komorek: Das Modell der Didaktischen Rekonstruktion - Ein theoretischer Rahmen für naturwissenschaftsdidaktische Forschung und Entwicklung. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften* 3 (1997) Heft 3, S. 3-18.
- [14] H. G. Schuster: *Deterministic chaos*. - Heidelberg: Spektrum 1992
- [15] R. Hedrich: Mathematische Stabilitätskonzepte. *Praxis der Naturwissenschaften - Physik* 45 (1996), Heft 1, S. 18-21.
- [16] M. Komorek: *Elementarisierung und Lernprozesse im Bereich des deterministischen Chaos*. - Kiel: IPN 1998
- [17] W. Wierzioch: Ein Schwingkreis spielt verrückt. In: Kuhn, W.: *Didaktik der Physik Vorträge*. Gahmig Druck Gießen: Gießen (1988) S. 292-298
- [18] R. Duit - M. Komorek - J. Wilbers: Studien zur Didaktischen Rekonstruktion der Chaostheorie. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften* 3 (1997) Heft 3, S. 19-34.
- [19] R. Duit - M. Komorek - J. Wilbers - W. M. Roth: Die Krux mit dem Mercedesstern - eine Unterrichtseinheit zum deterministischen Chaos. In: H. BEHRENDT (Hrsg.): *Zur Didaktik der Physik und Chemie - Probleme und Perspektiven*. Vorträge auf der Tagung für Didaktik der Physik/Chemie in Bremen, September 1996. Alsbach: Leuchtturm, 1997, S. 344-346.
- [20] R. Duit - W. M. Roth - M. Komorek - J. Wilbers: Conceptual change cum discourse analysis to understand cognition in a unit on chaotic systems: towards an integrative perspective on learning in science. *International Journal of Science Education* 20 (1998), S. 1059-1073.
- [21] H. Stadler - R. Duit: Teaching and learning chaos theory: Case studies on students' learning pathways. Paper presented within the Poster Workshop "Studies on Educational Reconstruction of Chaos Theory" at the ESERA (European Science Education Research Association) Conference in Rome, September 2 - 5, 1997
- [22] B. Naujack: Eine empirische Untersuchung zum Lernen von Grundideen des Fraktalmodells. In: Komorek, M., Duit, R., & Schnegelerberger, M. (Hrsg.): *Fraktale im Unterricht*, Kiel: IPN, 1998, S. 151-182.
- [23] N. Bücken: Experimente, Elementarisierungen und Schülererklärungen zum fraktalen Wachstum. In: Komorek, M., Duit, R., & Schnegelerberger, M. (Hrsg.): *Fraktale im Unterricht*, Kiel: IPN, 1998, S. 203-234.

## Anhang

### Anleitung zum Bau eines chaotischen Magnetpendels

Das magnetische Pendel läßt sich als Demonstrationsversuch für den Overheadprojektor oder als bewegliches Modell (Abb. 5) z.B. für die Gruppenarbeit realisieren. In jedem Fall empfiehlt sich, zur genauen Positionierung der Magneten eine Kreisschablone aus Papier bzw. auf einer Folie anzufertigen (Abb. 6). Diese Schablone sollte eine Markierung in der Mitte und drei strahlenförmige Markierungen am Rand im Winkelabstand von  $120^\circ$  besitzen. Bei der Justierung wird die Schablone genau mittig unter die eiserne Pendelkugel gelegt, bevor die Magneten in gleicher Entfernung von der Mitte auf die Winkelmarkierungen gelegt werden. Auf diesen Markierungen lassen sich die Magneten recht einfach gleichmäßig verschieben.

Für den Einsatz auf einem Overheadprojektor ist es günstig, die Magneten unter eine Glasscheibe zu legen. Praktisch ohne die magnetische Anziehung zu verringern, verhindert sie, dass sich die Magneten beim Annähern der Kugel bewegen. Bevor man die Fadenlänge reguliert, um die gewünschte "chaotische" Bewegung zu erhalten, muß die Optik des Projektors auf die Magneten fokussiert werden. Der Pendelfaden ist dann aufgrund der Fokussierung nicht mehr zu erkennen, so dass er bei der Beobachtung der charakteristischen Bewegung des Pendels nicht stört.

Für den Einsatz des Magnetpendels in Form eines transportablen Versuchsaufbaus empfiehlt sich, die Fadenhalterung fest mit einer magnetisierbaren Metallplatte zu verbinden. Mit Stativmaterial und einer Eisenplatte läßt sich dieser Aufbau relativ einfach realisieren. Eine solide Vorrichtung zur stufenlosen Regulierung der Fadenlänge ist wünschenswert. Eine Fadenlänge von ca. 60 cm bei einem Durchmesser der Metallplatte von 25 cm und einem Durchmesser der Pendelkugel von 12-16 mm haben sich als praktische Größenverhältnisse erwiesen. Allerdings hängen diese Maße von der Größe und der Kraft der Magneten ab. Der schematische Aufbau, der die wichtigsten Parameter einzustellen erlaubt, ist in Abb. 5 zu sehen.

Zum Starten der Pendelkugel benötigt man eine Vorrichtung, die es erlaubt, die Kugel möglichst genau vom gleichen Startpunkt aus zu starten. Dies ist wichtig, um mit den Schülerinnen und Schülern die Bedeutung der Reproduzierbarkeit der Startbedingungen zu diskutieren. Letztlich ist es nicht notwendig, die Präzision dieser Startvorrichtung unnötig hoch zu treiben (was im übrigen auch nicht einfach ist), wichtig ist, deutlich zu machen, dass ein gewisses Maß an Reproduzierbarkeit der Startbedingungen erreichbar ist.

In den Unterrichtserprobungen hat sich eine elektromagnetische Startvorrichtung bewährt, bei der die Pendelkugel mit Hilfe eines Elektromagneten zunächst seitlich der Magneten gehalten wird, bevor man den Spulenstrom zum Starten des Pendels per Knopfdruck kurz unterbricht. Es empfiehlt sich, in die Spule einen Kunststoffkern einzufügen, der am vorderen Ende eine konische Vertiefung besitzt. Das bietet den Vorteil, dass das Pendel aus dieser Höhlung heraus mit recht hoher Reproduzierbarkeit gestartet werden kann. Die Startvorrichtung läßt sich ebenfalls aus Stativmaterial konstruieren, so dass man den Startpunkt des Pendels für jeweils eine Serie von

Durchgängen variabel einstellen kann. Nicht-elektromagnetische Startvorrichtungen (wie z.B. eine hölzerne Plattform, die beim Starten nach unten wegklappt) haben sich als wenig vorteilhaft erwiesen, da die mechanische Beeinflussung des Pendels zu groß ist. Um das qualitative Verhalten des Pendels zu demonstrieren, läßt es sich natürlich auch per Hand starten.

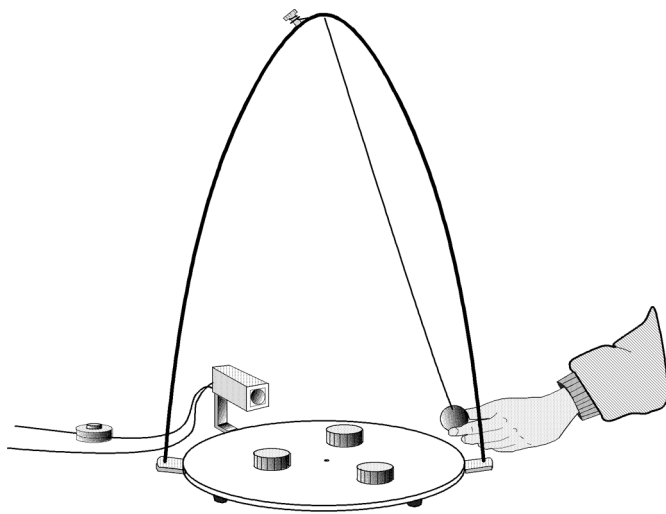


Abb. 5: Schematischer Aufbau des Magnetpendels

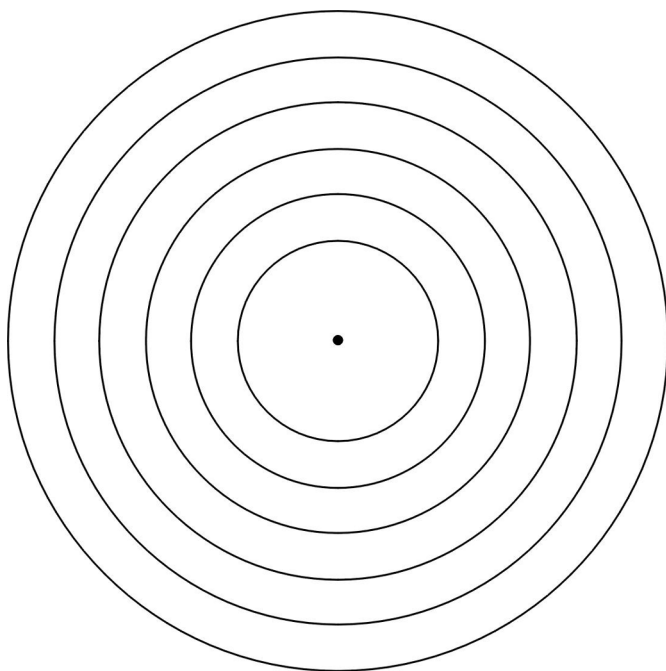


Abb. 6: Schablone zur Positionierung der Magneten

### "Chaosschüssel" als Analogmodell

Räumliche Analogien wie "Wall" und "Berggrat" sind bei der Erklärung des Magnetpendels hilfreich. Bestimmte Bewegungselemente findet man beim Magnetpendel wieder: Das "Entlanglaufen auf einem Grat" (z.B. beim ersten Hineinschwingen), das schräge "Anlaufen gegen einen Wall" und das "In-Sich-Zurücklaufen". Beim Analogmodell der "Chaosschüssel" sind die Potentialverhältnisse, wie sie beim Magnet-

pendel zu finden sind, räumlich umgesetzt worden. Die Chaosschüssel besitzt drei Vertiefungen und drei Wälle in einer halbrunden Grundform (Abb. 7). Wenn eine Kugel in dieser Schüssel rollt, zeigt sie qualitativ die gleichen Bewegungen, wie das Magnetpendel um die drei Magneten herum. Mit diesem Analogmodell ist es möglich, die verschiedenen Bewegungsformen des Magnetpendels zu erklären.

Die Chaosschüssel läßt sich aus Gips formen, den man in eine Haushaltsschüssel von ca. 25 cm Durchmesser gießt. Kurz vor dem Erstarren bildet man eine gleichmäßig runde Vertiefung (die dem Gravitationspotential entspricht), indem man mit einer Plastik- oder besser noch mit einer Metallschablone (Abb. 8a) die Grundform herausdreht. Nach dem Erstarren, aber vor dem Aushärten formt man mit kleinen Holzmeißeln o.ä. die drei Vertiefungen entsprechend der zweiten Schablone (Abb. 8b). Im ausgehärteten Zustand setzt man die Bearbeitung mit Schmirgelpapier und Stahlwolle fort und läßt schließlich die gesamte Oberfläche der Gipschale mit einem harten Tiefengrund (für Holz) ein.

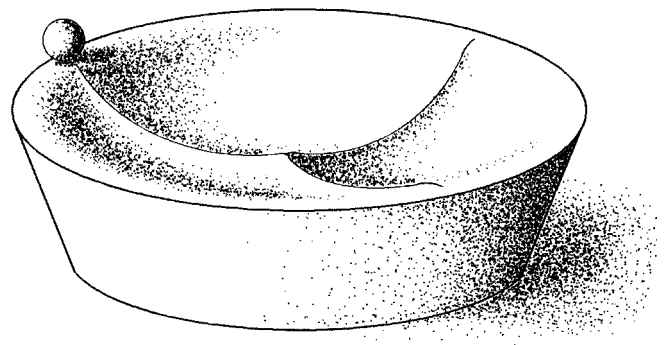


Abb. 7: "Chaosschüssel"

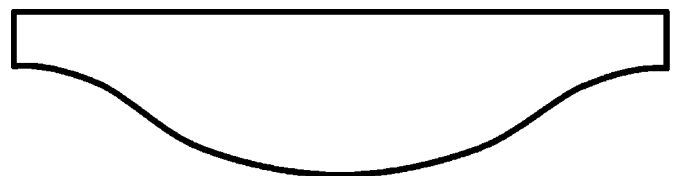


Abb. 8a: Lehre zur Bildung der Grundform der "Chaosschüssel"



Abb. 8b: Lehre zur Bildung der Vertiefungen