

Die zwei berühmtesten Naturkonstanten

Unterrichtsversuche und geschichtliche Anmerkungen

Leopold Stadler

1. Einleitung

Leicht zu erraten – es sind die Gravitationskonstante sowie die Lichtgeschwindigkeit gemeint. Erstere kennzeichnet die weit-aus schwächste der vier Wechselwirkungskräfte, letztere stellt immerhin die größte aller physisch möglichen Geschwindigkeiten (von Teilchen oder Signalen) dar.

Der experimentellen Behandlung im Schulunterricht standen lange Zeit die extremen Größenordnungen dieser Konstanten im Wege:

$\gamma = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$, $c = 2,997 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx 3 \cdot 10^5 \text{ km/s}$. Dies bedeutet beispielsweise: zwei nebeneinander sitzende Schüler ziehen einander mit ca. $112 \mu\text{N}$ an; das Licht benötigt quer durchs Klassenzimmer etwa 25 ns oder für die Strecke Stephansdom – Kahlenberg $27 \mu\text{s}$. Andererseits: ein Funksignal zu einer Raumsonde, welche soeben Neptun passiert, ist gut 40 Minuten unterwegs.

2. Die Massenanziehung

Als Isaac Newton 1727 starb, war er davon überzeugt, dass es niemals möglich sein werde, sein Gravitationsgesetz nachzumessen – wegen der extremen Schwäche der Massenanziehung zwischen zwei wägbaren Körpern.

Heute können alle meine Schüler beobachten, wie zwischen zwei Bleikugeln eine winzige Anziehungskraft wirkt. Damit ist auch erreicht, dass das "Gewicht" als Sonderfall eines allgemeinen Phänomens begriffen wird – eine Einsicht, die in unserem Alltag nicht zu gewinnen ist.

Die Entwicklung, welche zwischen diesen beiden Aussagen steht, sei an einigen markanten Daten aufgezeigt:

- Isaac Newton (1643–1727) durchschaut 1666 als erster das Wesen der irdischen Schwerkraft; 1686 formuliert er das zugehörige Kraftgesetz: $F_g = \gamma \cdot m_1 \cdot m_2 / r^2$ (gilt exakt für zwei Kugelmassen mit $\rho = \rho(r)$); er hatte es aus der Forderung abgeleitet, dass es so beschaffen sein müsse, dass daraus die Kepler'schen Gesetze (1609, 1619) der Planetenbewegung folgen müssen.
Über die Größe "seiner" Konstante γ hatte Newton durch-aus richtige Vorstellungen; er hatte für die Erdkugel eine mittlere Dichte von ca. 5 g/cm^3 angenommen und auch einen neuen, guten Wert für den Erdradius zur Verfügung. Daraus konnte Newton die Erdmasse und somit γ berechnen.
- Henry Cavendish (1731–1810) veröffentlichte 1798 Ergebnisse von Messungen, welche er mit einer von John Michell (†1793) übernommenen Drehwaage ausgeführt hatte.

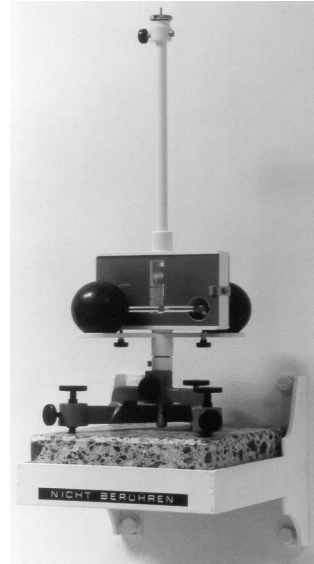


Abb. 1: Drehwaage

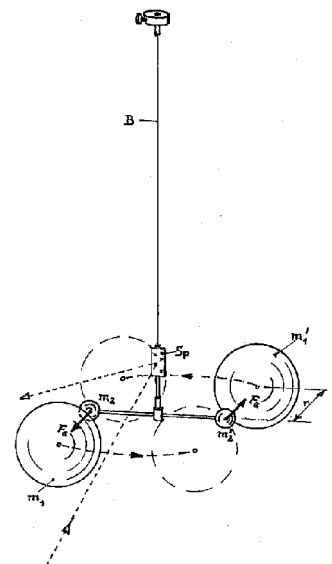


Abb. 2: Funktionsprinzip der Drehwaage

Technische Daten

Massen (aus chem. reinem Blei)	$m_1 = 1,5 \text{ kg}$, $m_2 = 15 \text{ g} = m_1/100$
Torsionsband (aus Be-Bronze)	$l \approx 25 \text{ cm}$, $A = 0,15 \text{ mm} \times 0,01 \text{ mm}$
kleinster Abstand der Kugelmitten	$r = 4,63 \text{ cm}$
Schwingungsdauer	$T = 586,5 \text{ s} \approx 10 \text{ min}$
Winkelrichtgröße	$D^* = 8,8 \cdot 10^{-9} \text{ Nm/rad}$
Trägheitsmoment des Gehänges	$J = 7,7 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2$
Länge des Lichtzeigers	$L = 6,77 \text{ m}$, daher
opt. Vergrößerung durch den Lichtzeiger	$v = 270$
Endausschlag (Mittelwert aus 10 Messungen)	$a = 20,7 \text{ cm}$

Cavendish hatte damit als Methode der Messung kleinster Kräfte die Torsion dünner Drähte in die Präzisionsphysik eingeführt. Sein Ergebnis von $\gamma = 6,71 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ war für damalige Möglichkeiten eine hervorragende Leistung.

- Charles Vernon Boys (1855–1944) unternahm in London im Juni 1889 erstmals den Versuch, die Massenanziehung als Vorlesungsexperiment vorzuführen. Da er gelernt hatte, sehr feine Quarzfäden herzustellen, kam er mit kleinen Massen (700 g/15 g) aus. Cavendish hatte sich noch mit 158 kg bzw. 0,73 kg abgemüht.
- Für den anspruchsvollen Physikunterricht hat sich weltweit eine von Prof. Paul Schürholz entwickelte Drehwaage durchgesetzt; alle Details sind optimiert und bedienungsfreundlich ausgeformt.*)

*Einerseits wächst die Empfindlichkeit einer Gravitationsdrehwaage, je kleiner ihre Abmessungen sind, andererseits wird dabei die Eigenenergie des Systems so klein, dass Störungen nicht mehr zu beherrschen ist.

Beschreibung: Unser Exemplar steht erschütterungsfrei und staubgeschützt auf einer Wandkonsole (Entwurf Verf., Herstellung Verf. und Schweißerei) auf einer Steinplatte im Physiksaal (Abb. 1). Um die Drehbewegung beobachten zu können, ist zusätzlich ein kleiner Oberflächenplanspiegel (Sp) montiert, er lenkt das Licht eines fokussierbaren Lasers zu einer Skala an der gegenüberliegenden Wand, wodurch 270-fache Vergrößerung erzielt wird. Ein für alle mal justiert arbeitet die Drehwaage tadellos und ist problemlos zu bedienen.

Das Funktionsprinzip ist einfach und aus Abb. 2 zu entnehmen. Zwei gleiche, kleine Bleikugeln (m_2, m_2') sind an einem \perp -förmigen "Gehänge" befestigt; das ganze hängt an einem feinen Bändchen (B) aus Beryllium-Bronze. Es kann noch sicher das Gewicht dieser Körper tragen, gleichzeitig ist es extrem torsionsempfindlich.

Im Ruhezustand besteht ein Gleichgewicht zwischen dem Drehmoment der zwei Massenanziehungskräfte (F_G) und dem Gegenmoment des verdrehten "Fadens". Nach Schwenken der zwei großen Massen in die symmetrische Lage sind die zwei Massen-Anziehungskräfte und somit ihr Drehmoment umgepolt; das Bändchen entdrillt sich daraufhin und versucht, sich gegengleich zu verwinden. Dieses geschieht in Form einer extrem langsamen, gedämpften Torsionsschwingung, welche nach etwa einer Stunde zur Ruhe kommt.

Bedenkt man, wie winzig die Kräfte (0,7 nN) bzw. das Drehmoment ($7 \cdot 10^{-11}$ Nm) sind, erscheint es fast als Wunder, dass sich überhaupt "etwas tut".

Qualitative Vorführung: man legt die großen Massen um und beobachtet einen Schwingungsaussschlag, welcher nach kaum fünf Minuten über 30 cm erreicht.

Für die quantitative Auswertung – Bestimmung der Gravitationskonstante – stehen zwei Methoden zur Verfügung: die Vermessung der Anfangsbeschleunigung oder die Auswertung des Endausschlages. Erstere hat zwei Vorteile: sie benötigt wenig Zeit und setzt nur einfache, bereits unterrichtete Formeln voraus. Nachteilig ist, dass wegen der beginnenden Entdrillung die Beschleunigung anfängt nachzulassen, während wir mit $a = \text{konst.}$ rechnen; dadurch wird γ systematisch zu klein.

Messbeispiel: Der Lichtzeiger benötigt $t = 51,4$ sec für die ersten $x = 3$ cm bzw. $\Delta r = x/v = 3/270$ cm (ab Massenumlegung):

$$F = m_2 \cdot a, \quad \Delta r = \frac{a}{r} \cdot t^2 \Rightarrow$$

$$2 \cdot \gamma \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} = m_2 \cdot \frac{2 \Delta r}{t^2},$$

$$\gamma = \frac{xr}{vm_1 t^2} = \frac{0,03m(0,0463m)^2}{270 \cdot 1,5kg(51,4s)^2} =$$

$$6,01 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

Die Endausschlagmethode benötigt zum Auswerten Kenntnisse über Torsionsschwingungen sowie eine Stunde Zeit bis zur Ablesung; sie eignet sich daher kaum für die Unterrichtsstunde.

Nach genauer Kalkulation einiger Korrekturen, deren größte der schwächende Einfluss der diagonalen Massenanziehung

$m_1 \sim m_2'$ bzw. $m_1' \sim m_2$ (etwa 7,4%) ist, ergibt sich, dass die Rohwerte um 6,0% zu vergrößern sind; damit verbessert sich das obige Ergebnis auf $6,37 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$. Die Endausschlagmethode plus Korrekturen führen an die Grenze der Leistungsfähigkeit des Gerätes, $\gamma = 6,62 \dots 6,72 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$.

3. Die Lichtgeschwindigkeit

Galileo Galilei (†1642), u. a. Entdecker der vier großen Jupitermonde mit Hilfe seines kurz vorher erfundenen und auch selbst gebauten Fernrohres, konnte die Frage nicht entscheiden, ob Licht "unendlich rasch" ist oder ob es sich extrem schnell ausbreitet.

Heute können meine Schüler beobachten, wie die Laufzeit des Lichts innerhalb des Lehrsaales zur Messung seiner Geschwindigkeit***) ausreicht. Auch zu diesem Kontrast einige historische Zeitmarken:

- Ole Christensen Romer (1644–1710) beobachtete 1675/76 als kgl. dänischer Hofastronom ein Jahr lang die Umläufe der großen Jupitermonde und bemerkte periodische Schwankungen der Umlaufzeiten; nun "fiel bei ihm der Groschen": Ursache mußte die wechselnde Distanz Jupiter-Erde und in Folge die variierende Laufzeit des Lichtes bis zu seinem Fernrohr sein! Daraus ermittelte Romer erstmals die richtige Größenordnung von c – er erhielt ca. 230000 km/s, also 23 % zu wenig.
- 1727: James Bradley (1692–1762) bestätigt und verbessert Romers Ergebnis nach der Methode der Aberration des Lichtes auf Grund der Eigenbewegung der Erde 20,6" im Zenith, $c = 295000$ km/sec.
- 1849: Feinmechanik und Optik waren leistungsfähig genug geworden, dass Amand Hypolyte Fizeau (1819–1896) erstmals in einem terrestrischen Versuch ("Zerhacken" des Lichtstrahls mittels rotierendem Zahnrad) c bestimmen konnte (Lichtweg $\approx 8,6$ km!). Sein Ergebnis: 313900 km/s. Bereits ein Jahr später,
- 1850 experimentiert J. B. Léon Foucault (1819–1868) nach einem Vorschlag von Dominique Francois Arago (1786–1853) aus d. J. 1838 mit einem rasch rotierenden Planspiegel, der im Brennpunkt eines langbrennweitigen Hohlspiegels steht. Ergebnis: 300900 km/s
- 1878 verbessert A. Abraham Michelson (1852–1931) diese Methode (s.u.) und verkürzt dabei den Lichtweg derart, dass auch die Lichtgeschwindigkeit in durchsichtigen Medien bestimmt werden kann.
- Moderne Verfahren arbeiten mit Kerr-Zellen, Hohlraumresonatoren oder Mikrowelleninterferometern ($c = f \cdot \lambda$).

Egal ob Geschoss-, Schall- oder Lichtgeschwindigkeit, beim Unterrichtsversuch ist die direkte Methode über Weg und Zeit allen indirekten Verfahren didaktisch überlegen. Für die Demonstration der Lichtgeschwindigkeit in Luft ist die Methode nach Fizeau und Michelson am besten geeignet, da man mit Lichtwegen im Lehrsaal auskommt und alle Größen leicht überprüfbar sind.

Abb. 3 zeigt den Strahlengang, adaptiert vom Verf. zugunsten minimaler Gesamtlänge. Prinzip: Es wird jene Laufzeit er-

***Der Unterschied der Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum und jener in Luft kommt nur bei Präzisionsmessungen zum Tragen; es ist $c = 1,00027 c_v$

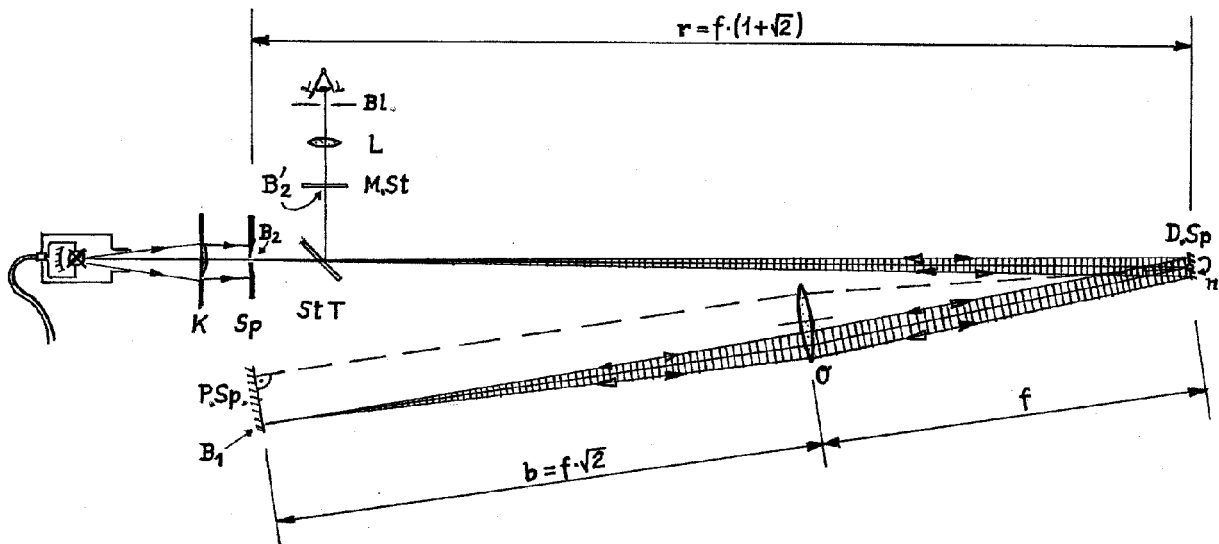


Abb. 3: Strahlengang des Michelsonschen Drehspiegelversuchs

fasst, welche das Licht benötigt, um vom Drehspiegel ($D.Sp$) zum Bild B_1 am Planspiegel ($P.Sp$) und zurück zum Drehspiegel zu gelangen (ca. 68 ns); diesen findet das Licht um einen kleinen Winkel weitergedreht vor, so dass das sekundäre Bild B_2 etwas zur Seite geschwenkt erscheint.

Eingerichtet wird der Strahlengang natürlich bei stillstehendem Drehspiegel; dieser wird so zurechtgedreht, dass das reflektierte Licht die Mitte der Objektivlinse ($f = 4,2 \text{ m}$) trifft und im Zentrum des Oberflächenplanspiegels ein reelles, verkleinertes Bild B_1 des Spaltes entsteht.

Der Drehspiegel wirkt als Aperturblende und befindet sich im dingseitigen Brennpunkt des langbrennweitigen Objektivs (O). Daher trifft der Mittelstrahl des Lichtbündels rechtwinkelig auf den großen Planspiegel und das Licht läuft in sich zurück, um im Spalt (Sp) ein weiteres Bild B_2 zu erzeugen. Um letzteres beobachten zu können winkelt ein Strahlenteiler ($St.T.$) den halben Lichtstrom zur Seite und liefert auf einem Glasstreifen mit eingeritzter mm-Skala ($M.St.$) ein sekundäres Bild B_2' . Dieses kann man durch eine Lupe (L) von einer Irisblende (Bl) aus betrachten und seine Lage auf $0,1 \text{ mm}$ genau ablesen. Wie diese optische Anordnung realisiert aussieht, ist im Photo der Abb. 4 dargestellt.

Wesentliche Leistung dieses "telezentrischen Strahlenganges" (nach Michelson) ist, dass bei langsamer Rotation des Drehspiegels trotz der Bewegung des Lichtbündels und des Bildes B_1 das zweite Spaltbild B_2, B_2' in Ruhe bleibt! Vom Spiegel $P.Sp$ aus gesehen, bewirkt die Spiegeldrehung eine Art "Leuchtturm-Effekt": solange das reflektierte Lichtbündel über den Durchmesser des Objektivs huscht, bewegt sich auch das Bild über den gleich großen Planspiegel. Ein Beobachter sieht bei sehr kleiner Drehzahl das Bild B_2 flackern. Bei hoher Drehzahl (bis 570 U/sec) findet das vom Planspiegel zurückgekehrte Licht (Laufzeit $\Delta t = 2r/c$) den Drehspiegel um $\Delta\varphi$ verdreht vor ($\Delta\varphi = \omega \Delta t = 2\pi nr/c = 4\pi nr/c$). Das Bild B_2' wird um $2\Delta\varphi$ zur Seite geschwenkt: $x = 2r\Delta\varphi = 8\pi nr^2/c$.

Laut Abb. 3 ist $g = f(2 + \sqrt{2})$, $b = f\sqrt{2}$, $r = f(1 + \sqrt{2})$, daher gilt $c = 8\pi n^2(3 + 2\sqrt{2})/x$.

Man erhält sehr einfach eine genau bekannte Drehzahl, indem man die Tonhöhe, welche der rotierende Spiegel abgibt, mit einer Stimmgabel auf Normal-a ($f = 440 \text{ Hz}$) abgleicht.

$$c = 8\pi 440s^{-1}(4,2m)^2(3 + \sqrt{2}) / 0,0038m = 2,99 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Erstens ist dieser Wert hervorragend, zweitens das Verfahren verständlich sowie alle Werte leicht zu kontrollieren, und vor allem: das Liferlebnis, diese unvorstellbar große Geschwindigkeit überlisten zu haben, ist durch kein Lehrbuch und keine Simulation zu ersetzen. Der Beobachter blickt durch die Lupe und regelt die Spannung für den Motor des Spiegels hoch. Das Ohr vernimmt die mit n steigende Tonhöhe, das Auge sieht das Spaltbild proportional zu ihr auswandern.

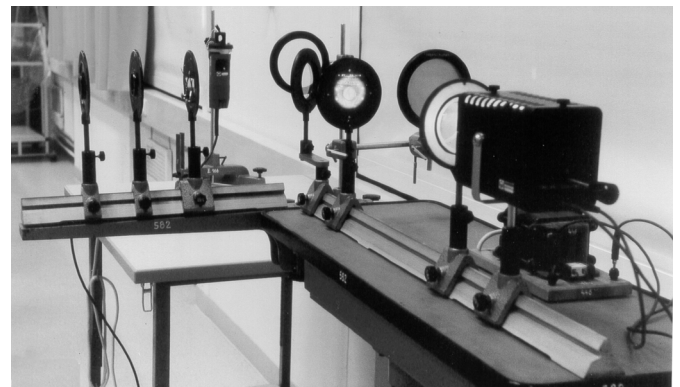


Abb. 4

Darüber hinaus spielt c im Gesamtbereich der Physik eine viel fundamentalere Rolle als der Laie vermuten würde; sie ist in Zusammenhängen zwischen Größen enthalten, welche mit der Ausbreitung von Licht oder elektromagnetischen Wellen nichts zu tun zu haben scheinen. Dazu zwei Beispiele:

Das Produkt von magnetischer Feldkonstante μ_0 und elektrischer Feldkonstante ϵ_0 beträgt $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$; die berühmte Masse-Energie-Beziehung lautet $E = \Delta m c^2$.