Strukturentstehung und Chaos im Unterricht

Johann Ganzberger

"Management by chaos", "Synergieeffekte", "Fraktale", "Schmetterlingseffekt" ... Begriffe und Schlagworte, die man immer öfter hört und die aus verschiedenen mathematischen und physikalischen Theorien seit den 60-er Jahren stammen.

In der klassischen Physik und auch im Unterricht betrachten wir meistens abgeschlossene Systeme. Hier gelten schöne Erhaltungssätze und der weniger angenehme zweite Hauptsatz der Wärmelehre, wonach die Entropie nicht kleiner werden kann. Damit bleibt aber unverständlich, wieso dennoch ständig Strukturen (Sterne, Galaxien, Leben,...) entstehen. Erst vor etwa dreißig Jahren haben Ilya Prigogine - ausgehend von der Chemie und von der Thermodynamik - und Hermann Haken - von der Laser-Physik her - begonnen, offene Systeme zu untersuchen. Seither versteht man solche dissipativen Strukturen und die Bedingungen, unter denen sie entstehen, allmählich immer besser. "Dissipativ" bedeutet, daß hochwertige Energie als "Abwärme" verlorengeht, und das geschieht meistens durch Reibungsmechanismen (Reibungskräfte, Konkurrenz, Personalvertretung,...) in Form von Rückkopplung. In konservativen, energetisch abgeschlossenen Systemen können diese Strukturen nicht entstehen und konservative Systeme sind nicht asymptotisch stabil. Das heißt, sie finden nach einer Störung nicht wieder zum Gleichgewicht zurück.

Die erwähnten Rückkopplungsmechanismen führen allerdings zu nichtlinearen Termen in der Beschreibung, und gerade solche nichtlinearen Systeme können sehr leicht chaotisch werden, falls sie mindestens drei Freiheitsgrade haben und genügend Energie zugeführt wird. Gemeint ist ein "deterministisches Chaos", und das bedeutet folgendes: Man geht davon aus, daß die zeitliche Entwicklung des Systems eindeutig feststeht, wenn das Kraftgesetz und die Anfangsbedingungen genau bekannt sind. Das ist klassische Physik und die Grundlage jeder seriösen Vorhersage (Kometenbahnen, Sonnenfinsternisse ...). Nun wissen wir zwar seit W. Heisenberg, daß die Anfangsbedingungen eben nicht beliebig genau gemessen werden können, aber das ist nicht der Grund dafür, daß Vorhersagen oft schwierig und langfristig sogar unmöglich sein können (Wetterprognose, Aktienkurs, Lawinenabgang ...). Dafür ist vielmehr die "sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen", wie sie bei nichtlinearen Systemen auftritt, verantwortlich. Sie ist in gewisser Weise viel unangenehmer als die Unschärferelationen. Wenn nämlich der Startwert auch nur geringfügig geändert wird, kann sich das System nach einer genügend langen Zeit vollkommen anders als vorhergesagt entwickeln, auch wenn der neue Anfangswert beliebig nahe beim ursprünglichen liegt. (In der Sprache der Mathematik: "Und sei Epsilon auch noch so klein ..."). Für reale Systeme wird sich das wegen der Unschärferelationen de facto nicht nachweisen lassen, aber es gibt viele Beispiele aus der Mathematik, nämlich gewisse Folgen, die dieses Verhalten zeigen (z.B. die Bernoulliabbildung) und wir das auch in der Schule, mit oder ohne Computer, sofort beweisen können.

Mag. Johann Ganzberger, BG/BRG Wien III, Hagenmüllerg. 30

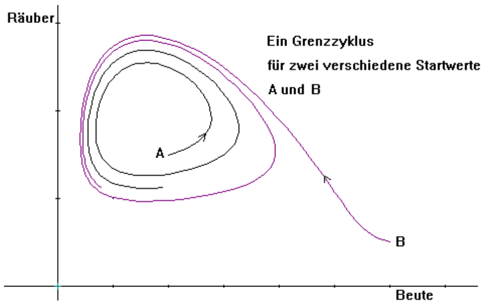
H. Poincaré hat das schon vor hundert Jahren gewußt, und R. Feynman hat es im Quantenmechanikband seines berühmten Physiklehrbuches betont. 1963 wurde von dem Meteorologen E. Lorenz anhand eines Modells der Atmosphäre chaotisches Verhalten nachgewiesen. Die eigentliche "Chaostheorie" sollte sich nun mit diesem Bereich ("chaotisches Regime") befassen, und das ist auch sehr reizvoll und lehrreich. Um sich hier zurechtzufinden, begibt man sich in den "Phasenraum" und macht - falls dieser mehr als dreidimensional ist - einen sogenannten "Poincaréschnitt". Wir haben das mit Schülern schon öfters gemacht ("Tropfender Wasserhahn", "Federpendel"...). Die Professoren Oskar Wagner und Peter Eichberger haben die Computerprogramme dazu geschrieben. Das aufregende daran ist, daß man in diesem abstrakten Raum - und hier werden die populärwissenschaftlichen Darstellungen oft ungenau oder falsch - trotz des chaotischen Verhaltens plötzlich wieder Strukturen erkennen kann, während eine Darstellung des Signals als Funktion der Zeit (vgl. EKG) absolut keine Regelmäßigkeit mehr zeigt. Will man die Chaotizität sogar messen, so hat man mehrere Hilfsmittel zur Verfügung. Etwa den Ljapunovexponenten oder die fraktale Dimension. Beide Konzepte sind im Regelunterricht leicht und sinnvoll unterzubringen.

Ich glaube aber, daß die eigentliche Bedeutung einer Theorie der komplexen Systeme eher in jenem schmalen Bereich unterhalb der Schwelle zum Chaos liegt, der in der Literatur gelegentlich auch als "Antichaos" bezeichnet wurde. Um anzudeuten, wie man in der Schule diese Begriffe sauber erarbeiten und auch experimentell begreifbar machen kann, möchte ich einige Beispiele und die Literatur dazu anführen.

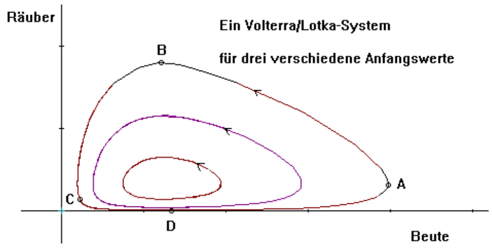
Laut Mathematiklehrplan werden in der siebten Klasse Funktionen unter anderem auf Unstetigkeitsstellen hin untersucht. Nach der Behandlung der bekannten drei Typen (Lücken, Sprungstellen, senkrechte Asymptoten) hat mich einmal ein Schüler gefragt: "Wann kommen endlich die interessanten Beispiele?" Ich war verblüfft. Er wollte aber nur wissen, ob man auch ausrechnen kann, wann eine Brücke einstürzt, warum Aktienkurse plötzlich ins Bodenlose fallen und wie sich Zellen teilen, ob die Alte Donau wieder umkippen wird und wie man sich für ein Studium entscheiden soll, wenn zwei völlig verschieden Gebiete genau gleich interessant sind. Mit solchen sprunghaften Phänomenen, Diskontinuitäten, Verzweigungen (Bifurkationen) befasst sich die Katastrophentheorie, die R. Thom in den 70-er Jahren entwickelt und von Anfang an hauptsächlich auf biologische Probleme angewendet hat. Für eine elementare Darstellung [1] braucht man nicht mehr als ein bißchen Differentialrechnung, denn es wird die Stabilität mit Hilfe von Potentialen untersucht, und das sind hier einfache Polynomfunktionen. Schöne Beispiele gibt es zur Gestaltpsychologie (Bistabilität in der Wahrnehmung) oder etwa zum Aggressionsverhalten. (Ein Hund "weiß" bis zuletzt selber nicht, ob er angreifen wird oder flüchten, ob also der "Ordnungsparameter" Aggression steigt oder fällt, wenn seine Wut und seine Angst - die beiden Kontrollparameter - zugleich steigen.) Einerseits wird hier sprunghaftes Verhalten klassifiziert und beschrieben. Andererseits wird klar, wieso verschiedene Individuen (etwa zwei Menschen) dieselbe "Form" haben, obwohl während der Embryonalentwicklung sehr störungsanfällige Verzweigungen (z.B. die Differenzierung der Zelltypen) stattfinden ("Generizität"). Man bekommt einen ersten Eindruck, daß jede Verzweigung zwar eine gewisse Unsicherheit mit sich bringt, warum man sich aber unbedingt auf dieses "Abenteuer" einlassen muß, wenn etwas Neues entstehen soll. Eine anstehende Entscheidung muß man treffen, sonst "gräbt sie sich ein" und Innovation wird unmöglich. Das Konzept der Ordnungsparameter gewinnt später bei Hermann Hakens Synergetik eine grundlegende Bedeutung, während sich die Katastrophentheorie "nur" mit solchen Systemen befaßt, die ein Potential haben (genauer gesagt genügt eine sog. Ljapunovfunktion), also im wesentlichen mit konservativen Systemen. Übrigens versucht die Katastrophentheorie nicht, die Psychologie oder andere Anwendungsgebiete zu mathematisieren. R. Thom hat sein Konzept selbst "eine Einschränkung der Willkür in der Beschreibung" genannt.

Was jetzt noch fehlt, sind Stabilitätsbegriffe, die auch so etwas wie ein "ökologisches Gleichgewicht" beschreiben. Der Hinweis, es handle sich um ein dynamisches Gleichgewicht, dürfte heute auch im Schulunterricht kaum genügen. Was verlangt man von einem derartigen System? Stellen wir uns die Zahl der Individuen der verschiedenen Pflanzen und Tierarten eines bestimmten Lebensraumes in einem Koordinatensystem aufgetragen vor - für jede Art eine eigene Achse. Die einfachste Form des Gleichgewichtes wäre ein Gleichgewichtspunkt, auf den alle Trajektorien aus einer gewissen Umgebung zulaufen. Solche Lösungen sind zwar möglich, aber sie widersprechen der Erfahrung. Viele empirische Daten, z.B über die Zahl der Luchse und Hasen in Kanada oder über das regelmäßige Auftreten von Schädlingen in Forstbeständen, sprechen für eine andere Dynamik, nämlich für eine periodische Lösung. Es soll etwas grundsätzlich Neues, eine Art zirkulärer Mechanismus entstehen, und Störungen in Form von Reibung (Konkurrenz, Krankheiten...) dürfen das nicht verhindern. Und wenn der Endzustand erreicht ist, dann muß das System auf Störungen (falls sie nicht zu groß sind) so reagieren, daß es wieder zum Gleichgewicht zurückfindet. Ein sogenannter Grenzzyklus leistet das Gewünschte [2],[3]. Wie ein solcher Grenzzyklus über eine "Hopfbifurkation" überhaupt entsteht, kann man zunächst an Beispielen aus der Mechanik studieren. Wenn ein Geigenbogen über die Saite gleitet und die Reibung nicht zu groß und nicht zu klein ist, wird das an sich stark gedämpfte System zu schwingen beginnen, ohne daß es periodisch erregt wird. Vielmehr nimmt sich die Saite gewissermaßen selbst nach jeder Schwingung die verlorene Energie, indem sie im richtigen Augenblick, nämlich wenn die Geschwindigkeiten übereinstimmen, kurz am Bogen haftet.

In der Biologie kennt man das am besten von den Räuber/Beute-Modellen [3]. Die eben erwähnten Eigenschaften haben natürlich nur Modelle mit innerspezifischer Konkurrenz.



Konservative Beispiele (z.B. das bekannte Volterra/Lotka -System) zeigen zwar periodisches Verhalten und auch eine schwächere Art von Stabilität (sie sind stabil im Sinne von Ljapunov [2]), aber sie sind nicht robust (man sagt auch "nicht strukturell stabil"). Das heißt, jeder noch so kleine Reibungsterm führt langfristig zu einem ganz anderen Verhalten - meistens zum Aussterben einer Spezies. Und sie sind eben nicht asymptotisch stabil.



Zum Volterra/Lotka-System:

A: Viele Beutetiere, wenig Räuber...

B: ...Die Räuber haben sich stark vermehrt aber wenig Beute übriggelassen,...

C: ...deshalb sind jetzt auch die Räuber fast ausgestorben...

D: ...und die Beutetiere können sich ungehindert vermehren.

Die Differentialgleichungen, die man hier verwendet, können ohne weiteres auch in der Schule diskutiert werden. Eine qualitative Analyse des Lösungsverhaltens ("Lineare Stabilitätsanalyse") verlangt zumindest Grundkenntnisse aus der Linearen Algebra (Eigenwertprobleme). In einem Wahlpflichtfach Mathematik wäre auch das keine Hexerei [4]. Was wir aber mit Hilfe des Computers ganz leicht machen können, ist die näherungsweise Lösung mit Hilfe des Runge/Kutta-Verfahrens.

Ist es überhaupt sinnvoll, sich mit solchen zweidimensionalen Modellen herumzuschlagen, wo doch in der Natur bestimmt sehr viel mehr Parameter zu einer vollständigen Beschreibung notwendig sind? Man kann fast immer die Dimension des Systems erniedrigen (mit Hilfe der "Zentralen Mannigfaltigkeiten") oder das System vereinfachen (womöglich linearisieren) [5].

Chaotisch können nur (autonome) Systeme werden, die mindestens dreidimensional sind (Satz von Poincaré/Bendixson [6]), und das schönste und bekannteste Beispiel dafür ist folgendes: Eine dünne Flüssigkeitsschicht - wir nehmen dafür Speiseöl - wird vorsichtig und gleichmäßig von unten erwärmt. Die Zähigkeit der Flüssigkeit und die Wärmeleitung verhindern, daß sofort Konvektion einsetzt. Erst wenn der Temperaturunterschied einen kritischen Wert überschreitet, beginnt - angeregt durch eine zufällige Störung - an irgendeiner Stelle Flüssigkeit nach oben zu steigen. Diesen kritischen Wert konnte schon Lord Rayleigh 1916 angeben. Seiner Theorie zufolge müßte nun die Geschwindigkeit der Strömung exponentiell steigen und sofort Turbulenz herrschen. Es geschieht aber etwas ganz anderes: Unmittelbar neben dem aufsteigenden warmen Flüssigkeitsvolumen beginnt kalte Flüssigkeit abzusinken, und die Schicht teilt sich spontan in charakteristische Konvektionszellen. Sie bilden ein Muster aus meist hexagonalen Zellen. Jede Zelle ist eine eigener Kreislauf mit konstanter Strömungsgeschwindigkeit. (Die Strömung macht man mit Aluminiumpulver sichtbar.)

Von außen kann man das System höchstens anregen, aber das Muster ist ganz unempfindlich gegen kleine Störungen. Innere

Faktoren bestimmen die Struktur. Die Symmetrie ist gebrochen, und ausgehend von einer Stelle ist eine langreichweitige Korrelation zwischen den Teilchen ist entstanden. Die Bedingungen sind: Gleichgewichtsferne, Energiezufuhr (offenes System), Entropieexport (Ordnung oder Information entsteht) und Nichtlinearität (Reibung) [7]. Die genaue Ursache für dieses Verhalten ist folgende: Durch die beginnende Konvektion wird die Temperatur im unteren Teil der Rollen kleiner und oben größer als bei einem linearen Temperaturgefälle - wie es sich einstellt, wenn die Wärme allein durch Wärmeleitung nach oben transportiert wird. Das bremst aber die Konvektion. Durch die nunmehr langsame Änderung der Geschwindigkeit fällt diese Temperaturabweichung schnell auf einen Gleichgewichtswert, der durch die Größe der Geschwindigkeit festgelegt wird. Allgemeiner: Eine oberhalb eines kritischen Wertes rasch anwachsende Größe "bedient" sich gewissermaßen einer stabil bleibenden Größe, um einerseits nicht schrankenlos zu wachsen und andererseits nicht zu verschwinden. Vielmehr setzt sie sich durch ihr nunmehr langsames Wachstum in die Lage, die Stärke der an sich rasch relaxierenden stabilen Größe selbst zu regeln ("Versklavungsprinzip", besser: Prinzip von Hermann Haken). Diese zirkuläre Form der Regelung ist mehr als nur Rückkopplung, sonst müßte ja jedes einzelne Teilchen ständig seinen Bewegungszustand und seine Temperatur an das Gesamtsystem melden und dieses anschließend jedes Teilchen "zurechtweisen". Sie ist auch robuster und anpassungsfähiger als ein Schrittmachermechanismus, der den Nachteil hätte, daß Fehler bei der "Befehlsausgabe" mangels Rückkopplung nicht kompensiert würden. Das ist Selbstorganisation. Das ist das Geheimnis der Synergieeffekte [8],[9]. In dem schönen Buch "Aus dem Nichts - Über die Kreativität von Natur und Mensch" hat der Nobelpreisträger Gerd Binning gezeigt, wie das auch in sozialen Systemen funktioniert [10]!

Konvektionszellen in der freien Atmosphäre sind auch der Ausgangspunkt für Lorenz' Arbeit aus 1963, denn oberhalb einer weiteren Schwelle wird die Strömung chaotisch, und Lorenz hat dafür ein ein stark vereinfachtes Modell gefunden [11], [12]. Es lohnt sich, die Originalarbeit [11] zu lesen!

Das besprochene Experiment machen die Schüler selbständig etwa im Wahlpflichtfach Physik und anschließend bewundern sie den schönen "Lorenzattraktor" am Bildschirm des Computers [13].

Woher weiß man übrigens, daß die Rechnungen am PC auch nur irgend etwas mit dem realen Experiment zu tun haben, wo doch der Rechner rundet und daher wegen der sensitiven Abhängigkeit eine ganz andere Entwicklung des Systems als die beobachtete zu befürchten wäre? Seit einigen Jahren kennt man auch hier die Antwort: Das "Beschattungslemma" stellt sicher, daß in jeder beliebig nahen Umgebung einer berechneten Bahn auch eine exakte Bahn startet und beliebig nahe bleibt [14].

Ohne Computer wären diese Ergebnisse in den letzten Jahrzehnten nicht erzielt worden und auch im Unterricht nicht sinnvoll zu besprechen. Aber im Vordergrund stehen für uns immer noch das Experiment und in der Mathematik nach wie vor konkrete Beispiele mit analytischen Ergebnissen [14]. Dafür braucht man nur Bleistift und Papier! Dasselbe gilt für die Fraktale, die deshalb so wichtig sind, weil sie wirklich vorkommen (nicht nur im Phasenraum) [15].

"Chaostheorie" ist keine Modeerscheinung, und ich wollte zeigen, daß wir auch in diesem Zusammenhang mit Schülerinnen und Schülern mehr unternehmen als nur mit dem Computer spielen und "Apfelmännchen" zeichnen. Wenn sich diese Grundgedanken auch unter Lehrern herumsprechen, was bereits geschieht, dann lohnt es sich, noch mehr als bisher auf die Fragen der Schüler einzugehen, statt den Unterricht auf die Minute genau zu planen, den Stoff "durchzuziehen" und den Schülern einzureden, sie dürften keine Fehler machen. Nicht jeder Inhalt wird sich dafür eignen, aber hin und wieder darf auch der Ertrag einer Unterrichtseinheit unvorhersagbar sein. Zu viele Verzweigungen und Rückkopplungen finden statt.

Literatur

[1] P.T. Saunders, *Katastrophentheorie, Eine Einführung f. Naturwiss.*, Vieweg 1986

[2] G. Nicolis, I. Prigogine, *Die Erforschung des Komplexen*, Piper 1987

[3] J. Hofbauer, K. Sigmund, *Evolutionstheorie und dyn. Systeme*, Math. Aspekte der Selektion, Paul Paray V. 1984 (bes. schöne Einf. in die qualitat. Theorie der Diff.gl.)

[4] E. Boyce, R. C. DiPrima, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Spektrum Akademischer Verlag 1995

[5] H. Troger, A. Steindl, *Nonlinear Stability and Bifurcation Theory*, Springer 1991

[6] P. G. Drazin, *Nonlinear Systems*, Cambridge University Press 1992

[7] W. Ebeling, R. Feistel, *Chaos und Kosmos,* Prinzipien der Evolution, Spektrum Akademischer Verlag 1994

[8] H. Haken, Arne Wunderlin, *Die Selbststrukturierung der Materie* - Synergetik in der unbelebten Welt, Vieweg 1991

[9] H. Haken, *Synergetik*, Springer 1990

[10] G. Binning, *Aus dem Nichts,* Über die Kreativität von Natur und Mensch, Piper 1989

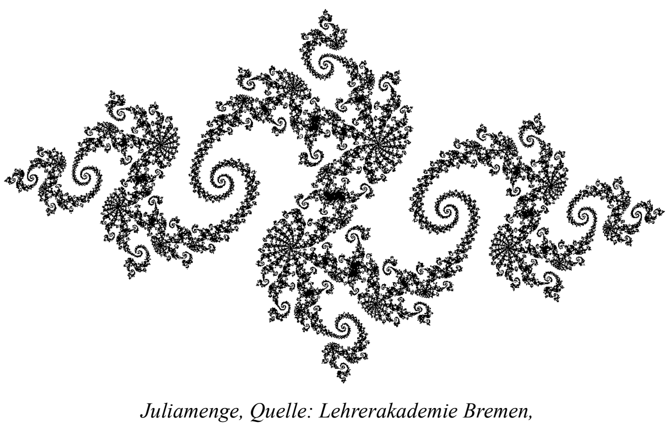
[11] Edward N. Lorenz, *Deterministic Nonperiodic Flow* in Journal of the Atmospheric Sciences Volume 20 p. 130, March 1963

[12] H.G. Schuster, *Deterministic Chaos*, VCH 1988

[13] *Pelmo,* Dynamische Systeme. Ein Programmpaket von Dir. Kurt Wagner, Klagenfurt

[14] H.O. Peitgen u.a., *Chaos*, Bausteine der Ordnung, Klett-Cotta/Springer-Verlag 1994

[15] B. Mandelbrot, *Die Fraktale Geometrie der Natur*, Birkhäuser 1987 und viele andere schöne Bücher...



Juliamenge, Quelle: Lehrerakademie Bremen, http://www.cevis.uni-bremen.de/education/Lehrakad.html