Fakultät für Physik

universität wien

Umgang mit Messunsicherheiten im Physikunterricht

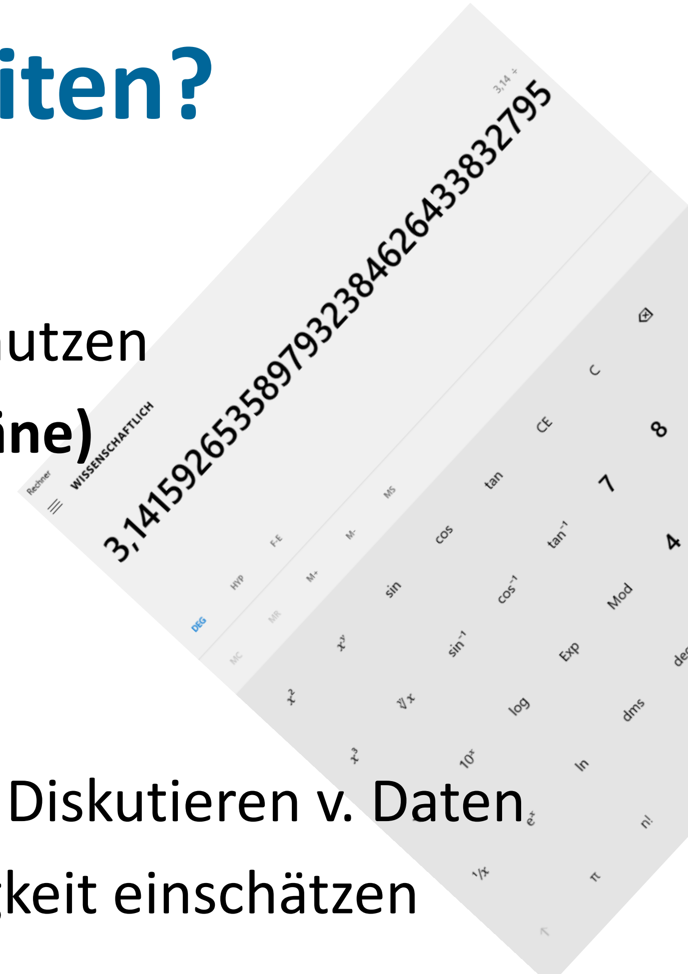
Dr. Clemens Nagel

INHALT

1. Wozu braucht man Messunsicherheiten?
2. Begriffe , Normen, Regelwerke
3. Typ-A-Messunsicherheiten
4. Typ-B-Messunsicherheiten
5. Zusammengesetzte Unsicherheiten

Vorschläge für Methodenwerkzeuge im und Tipps für den Unterricht kommen immer wieder zwischendurch.

Wozu braucht man Messunsicherheiten?



Scientific Literacy (PISA)

- Naturwissenschaftliche Evidenzen nutzen

Naturwissenschaftliches Arbeiten (Lehrpläne)

- Erwerb experimenteller Fähigkeiten
- Auswertung von Daten
- Kritischer Umgang mit Ergebnissen
- Kommunizieren, Gegenüberstellen, Diskutieren v. Daten
- Handlungskompetenz E: Zuverlässigkeit einschätzen

Wozu braucht man Messunsicherheiten?

Ein Beispiel

Schülerin A:	Wie ist dein Body-Mass-Index?
Schüler B:	23,5 kg/m^2
Schülerin A:	Meiner ist niedriger, ich habe 22,8 kg/m^2.

Richtig oder Falsch?

Weder, noch. Ohne Kenntnis der Messunsicherheit können die beiden Werte nicht verglichen werden.

z.B. $BMI_A=(23,5\pm0,8)\ kg/m^2$ $BMI_B=(22,8\pm0,8)\ kg/m^2$

→ $BMI_A= BMI_B$ die BMI sind nicht unterscheidbar

→ Messunsicherheit ist etwas Gutes, sie gibt das Vertrauens-ausmaß in unsere Daten an und macht Daten erst vergleichbar!

Wissenschaftlichkeit und fehlerfreie Daten…

- Jeder wissenschaftlich relevante Datenwert hat eine Unsicherheit (z.B. Wie viele Äpfel sind im Obstkorb?)
- Ein Datenwert ohne Angabe einer Unsicherheit kann wissenschaftlich nicht relevant sein!

Sir Karl Popper: Wissenschaftliche Erkenntnis ist nicht beweisbar, nur falsifizierbar.

→ Sichere wissenschaftliche Erkenntnis ist nicht möglich!

Expertenkongress: 2 Gruppen Schüler/innen denken sich mind. Je eine Frage aus, von der sie glauben, dass sie mit exakter (sicherer) Messung beantwortet werden kann. Danach muss jede Gruppe die Behauptung der anderen argumentativ widerlegen.

Normen und Regelwerke

- DIN 1319 bzw. DIN V ENV 13005
- ÖNORM ENV 13005 : 1999 07 01
  - ENV: Europäische Vor-Norm: war bis 2015, also 16 Jahre lang empfohlen.
  - Diese basiert auf 2 Empfehlungen:
    - Empfehlung 1 des CIPM (Internationales Komitee für Maß und Gewicht)
    - Empfehlung der ArGe zur Angabe von Messunsicherheiten der BIPM (internationales Büro für Maß und Gewicht)

↓

Normen und Regelwerke

GUM – Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement

Prozess zur Normung der „Fehlerrechnung“ läuft seit den 70er Jahren des 20. Jahrhunderts…

An der GUM ist auch die ISO beteiligt, der über 150 Länder angehören. Das ist die derzeit einzige Normung, die empfohlen wird.

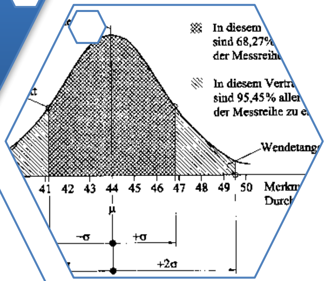
Die meisten Lehrbücher richten sich nach diesen Empfehlungen. Auch diese Vorlesung, wenngleich für Typ B-Unsicherheiten nicht uneingeschränkt!

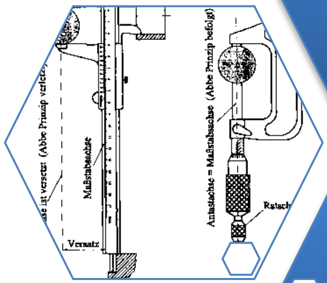
Begriffe, Normen, Regelwerke

Statistischer Fehler

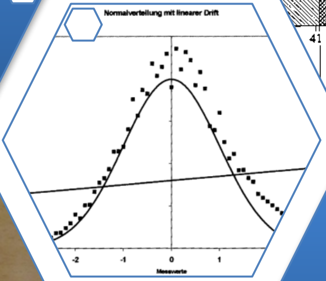
Systematischer Fehler

Präzision, Streuung





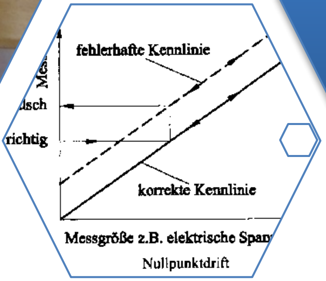
Messunsicherheit

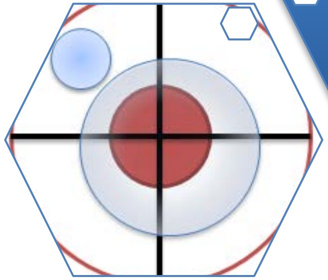


Messgenauigkeit

Abweichung vom Eichstandard

Richtigkeit (Accuracy)





Begriffe, Normen, Regelwerke

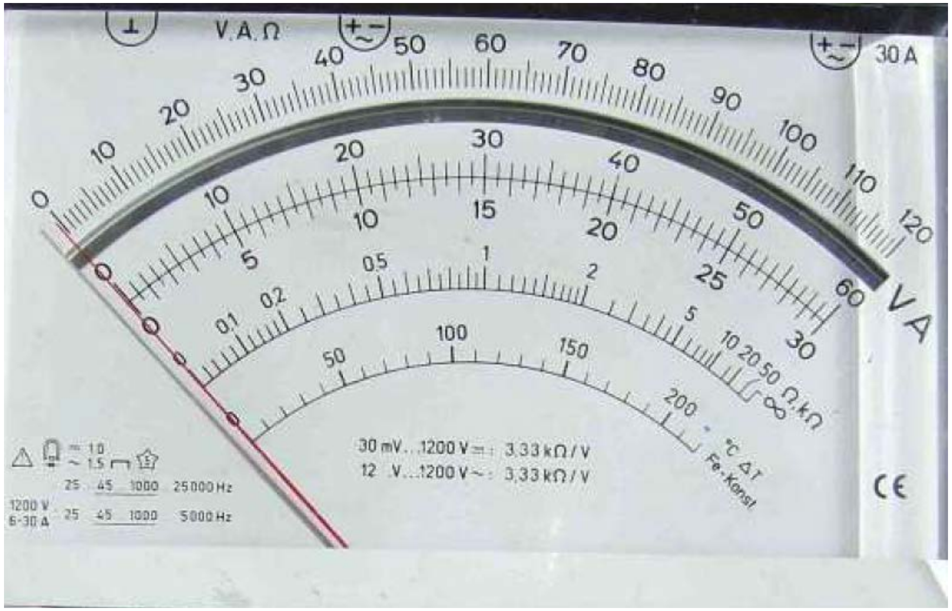
- Die Begriffe ***Messfehler*** **und** ***Fehlerrechnung*** gehen zurück auf **C. F. Gauß** 1777-1855. „Jede Messung hat einen Fehler (=eine Abweichung) vom wahren Wert (welcher stets unbekannt ist)“
- Früher sprach man nur von „Fehlern“, heute ***sollte*** man korrekterweise von **Unsicherheiten** sprechen, außer wenn es sich um Fehler (= Abweichungen v. einem bestimmten Wert) handelt!
- Trotzdem wird oft ***in der physikalischen Umgangssprache*** „Fehler = Unsicherheit“ verwendet. Man sollte dafür Verständnis haben, es aber nicht auch noch fördern!

Fehler vs. Unsicherheit

- **Fehler** sind in Betrag *und Richtung* bekannte Abweichungen von einem Sollwert (z.B. Eichstandard).
  - **Grobe Fehler** (rückwirkend unkorrigierbar)
  - **Systematische Fehler** (rückwirkend korrigierbar)
- **Fehler** von Messungen müssen vermieden oder korrigiert werden.
- **Unsicherheit** ist unvermeidbar.
- Das Wesen der **Unsicherheit** ist, dass es prinzipiell nicht bekannt sein kann (und darf), wie groß die Abweichung zwischen dem wahren Wert und seinem besten Schätzwert ist oder in welche Richtung sie weist.
  - **TYP A („äußere") Unsicherheit (mit statistischen Methoden ermittelt)**
  - **TYP B („innere") Unsicherheit (mit anderen Methoden ermittelt)**

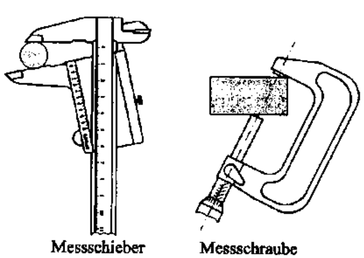
Historische Begriffsdefinition

- **Grober Fehler (Def. alt = Def. neu)**
  - Fehlüberlegungen bzgl. Theorie – Experiment
  - Bedienungsfehler, Ablesefehler
  - Vorzeichen- und Rechenfehler
  - Falsche Datenauswertungen
  - Falsche Dateninterpretationen

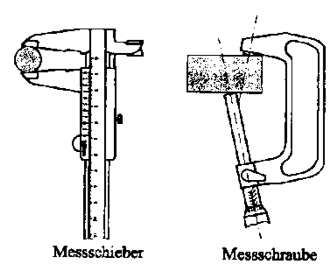


Historische Begriffsdefinitionen

- **Systematischer Fehler (Def. alt = Def. neu [ausgenommen 3.])**
  1. Sind in Betrag und Richtung bekannte Abweichungen vom wahren Wert, z.B. Kalibrationsfehler eines Drucksensors
  2. Verhalten sich bei gewollten Veränderungen der Messbedingungen gesetzmäßig
  3. Hier wurden früher auch die Messgenauigkeiten (bzw. „–ungenauigkeiten“) der Messgeräte hinzugezählt, obwohl deren Richtung *nicht bekannt* ist (Def. Neu = Typ-B-Messunsicherheiten)



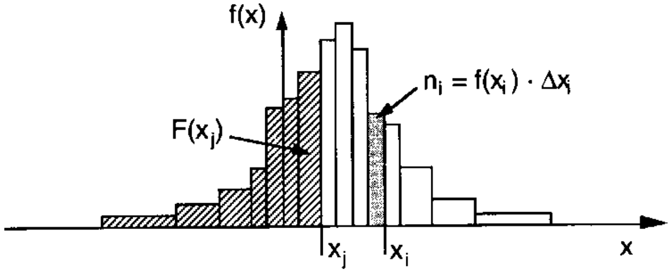
Kippungen



Biegungen

Historische Begriffsdefinitionen

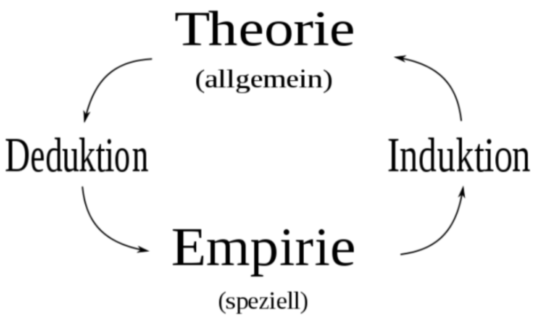
- **Statistischer Fehler** **(Veraltet. Def. neu = Typ-A-Messunsicherheiten)**
  - Sind zufällige Abweichungen vom wahren Wert, stochastische Größen
  - Wurden mithilfe der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung mathematisch beschrieben werden



Häufigkeitsverteilung als Histogramm
Schraffiert (links) die integrale Verteilungsfunktion $F(x_j)$; punktiert die i-te Klasse mit der Fläche n_i = relative Häufigkeit.

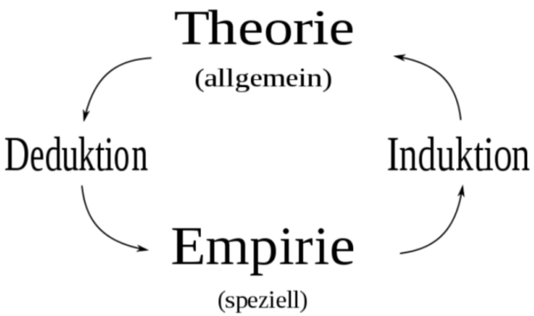
Moderne Begriffsdefinitionen

- **TYP-A-Unsicherheit („äußere Unsicherheit“)**
  - Lassen sich mit mathematischen (statistischen) Methoden basierend auf Wahrscheinlichkeitsverteilungen bestimmen,
  - die sich aus empirisch gewonnenen Häufigkeitsverteilungen ableiten.
  - Gibt es nicht für Einzelmesswerte, nur für Messreihen
  - Korrelieren nicht mit anderen Messunsicherheiten
  - Ergeben nur gemeinsam mit einer Theorie Sinn (wahrer Wert)
  - **Beschreiben die Präzision von Messungen**
  - > Analyse dieser Unsicherheiten durch Induktion
  - Bsp.: normalverteilte Messgröße



Moderne Begriffsdefinitionen

- **TYP-B-Unsicherheit („innere Unsicherheit“)**
  - Werden mit anderen Methoden, als der Statistik, bestimmt.
  - Lassen sich aus begründeten Annahmen über die die inneren Eigenschaften des Datenwertes bzw. der Messung (Messmethode, Messgerät,...) beschreiben.
  - Werden mathematisch aber ebenso mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen behandelt
  - Können mit anderen Typ-B-Unsicherheiten korrelieren
  - Ergeben bereits mit einer Messung alleine Sinn (Unsicherheit derselben)
  - **Beschreiben in erster Linie die Richtigkeit der Messung**
  - > Analyse dieser Unsicherheiten durch Deduktion
  - Bsp.: Lineal (Eich-, Linearitäts- und „Digitalisierungs-“ Unsicherheit)



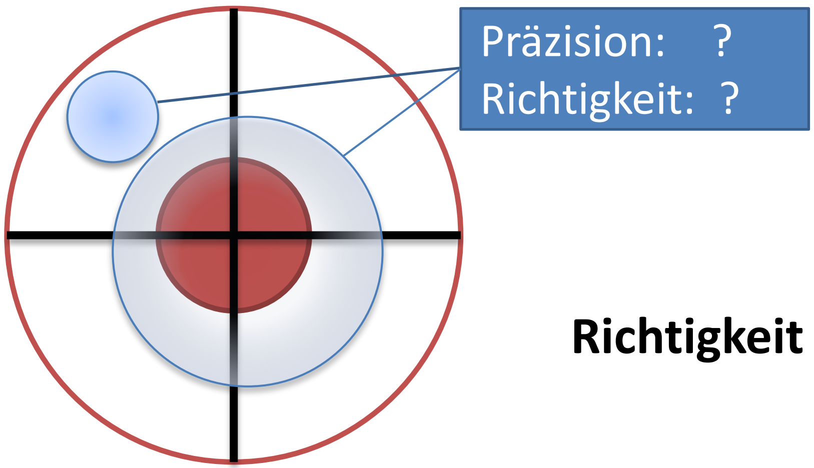
Moderne Begriffsdefinitionen

- **Präzision od. Streuung (precision)   Typ-A-Messuns.**
  - Wie stark streut die Messung um ihren Mittelwert (bester Schätzer des wahren Wertes). Verbesserbar durch Optimierung des Messgerätes.
- **Genauigkeit od. Richtigkeit (accuracy) Typ-B-Messuns.**
  - Wie weit weicht der Mittelwert einer Messreihe vom Sollwert (z.B. Eichstandard) maximal ab. Verbesserbar durch besseren Eichstandard.

Dartspiel:

Wer trifft die Scheibe

„richtiger“ bzw. „präziser“



Richtigkeit vor Präzision!

Begriffsdefinitionen: Übungsaufgaben

Was ist es?

A) Grober Fehler B) Systematischer Fehler C) Messunsicherheit

- Ich lese bei der Waage einen zu kleinen Wert ab, weil ich immer von schräg rechts oben betrachte.
- Ich stelle mich 10 Mal hinter einander auf die Waage und lese jedes Mal einen ganz leicht unterschiedlichen Wert ab.
- Ich lese versehentlich und *unbemerkt* an der Waage an einer falschen Skala (z.B. der englischen Pound-Skala, ich bin mir aber nicht sicher…) ab und notiere das Ergebnis als Masse in Kilogramm.
- Ich messe mit der Feinwaage fünf Mal. Jedesmal wird auf Gramm genau der selbe Wert angezeigt. Bei der Skala steht: +/- 1 g.

Typ-A-Messunsicherheiten

- Beschreibt die Streuung einer empirisch gewonnenen Stichprobe mit Hilfe einer passenden Modellverteilung
- Man braucht eine Modellverteilung um mit ihrer Hilfe die besten Schätzer für den wahren Wert und den Streuparameter zu erhalten.
  - Die Schätzung soll im Grenzfall einer unendlich umfangreichen Stichprobe den wahren Wert ergeben
  - Die beste Schätzung ist diejenige mit der kleinsten Streuung (MAXIMALE PRÄZISION)
- Mögliche Modellverteilungen:
  - Binomialverteilung
  - Poissonverteilung
  - Gauß-Verteilung (Normalverteilung)
  - T-Verteilung, Intervall und Exponentialverteilung, Cauchy-Verteilung,…

Typ-A-Messunsicherheiten

$$G(x,\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \underset{n\to\infty}{\overset{n.W.}{\Rightarrow}} \mu \qquad s_x=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\overline{x})^2}{n-1}} \underset{n\to\infty}{\overset{n.W.}{\Rightarrow}} \sigma$$

Die Gauß-Normalverteilung ist die wichtigste Verteilung für die Berechnung von äußeren Unsicherheiten, denn die meisten Messgrößen sind normalverteilt, insbesondere wenn:

- n und µ groß sind und p konstant ist
- der Abstand der Messwerte von einem messtechnisch bedingten Grenzwert groß genug ist, dass
- Die Wahrscheinlichkeit von Abweichungen beiderseits des Mittelwertes gleich groß ist und mit der Entfernung zu diesem abnimmt

Typ-A-Messunsicherheiten

Standardabweichung des Mittelwertes

= „Messunsicherheit" u_x (eine Bezeichnung nach GUM)

- Wenn Messreihen gemacht werden, so werden deren Mittelwerte und ihre Streuungen miteinander verglichen.
- Mittelwerte streuen geringer um den wahren Wert als Einzelmesswerte
- Für die Rechnung mit Unsicherheiten von normalverteilten Stichproben

$$u_x = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})^2}{n \cdot (n-1)}}$$

Ergebnisse mit Typ-A-Messunsicherheit werden so angegeben:

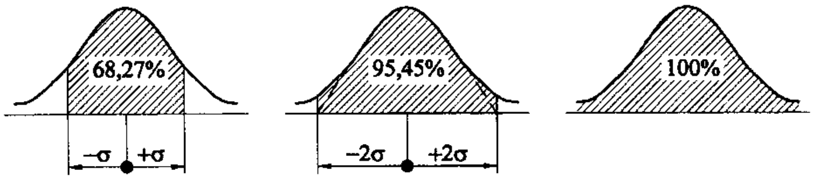
$$x = (\overline{x} \pm u_x)\,[x]$$

Typ-A-Messunsicherheiten: Übungsaufgaben

Schüler/innen-Experiment „Fadenpendel“

- Pro 2er-Gruppe ein Fadenpendel. Alle haben die gleiche Länge, außer eines (3-5 cm kürzer)
- Gesucht ist die Schwingungsdauer jedes Pendels mit Typ-A-Messunsicherheit. $n \geq 10$. Gemessen wird T (nicht 10T) von beiden Partnern.
- Danach Ergebnisse vergleichen und feststellen, welche sich unterscheiden und welche nicht.
- Ergebnis runden auf „messbare“ Stellen (Stoppuhr!)
  → Angabe aller Stellen vom Taschenrechner ist sinnlos.
- Wie viele u_T sind die beiden Mittelwerte von einander entfernt?

Typ-A-Messunsicherheiten



Bedeutung verschiedener Vertrauensbereiche

T-Test

Mit welcher Irrtumswahrscheinlichkeit wird die Annamhe, dass 2 Stichproben „gleich" sind, verworfen?

Häufige Konvention: Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$. Das bedeutet:
Bei $p \leq 5\%$ ([1-p] entspricht 1,96 σ) darf man von einem Unterschied sprechen.

Aktueller Kontext: Entdeckung des Higgs-Bosons

„Wir wollen aber erst von einer hinreichend sicheren Entdeckung sprechen, wenn wir eine statistische Sicherheit von 5σ erreicht haben."

[1-p] = 5σ → 99,99992467% Wahrscheinlichkeit

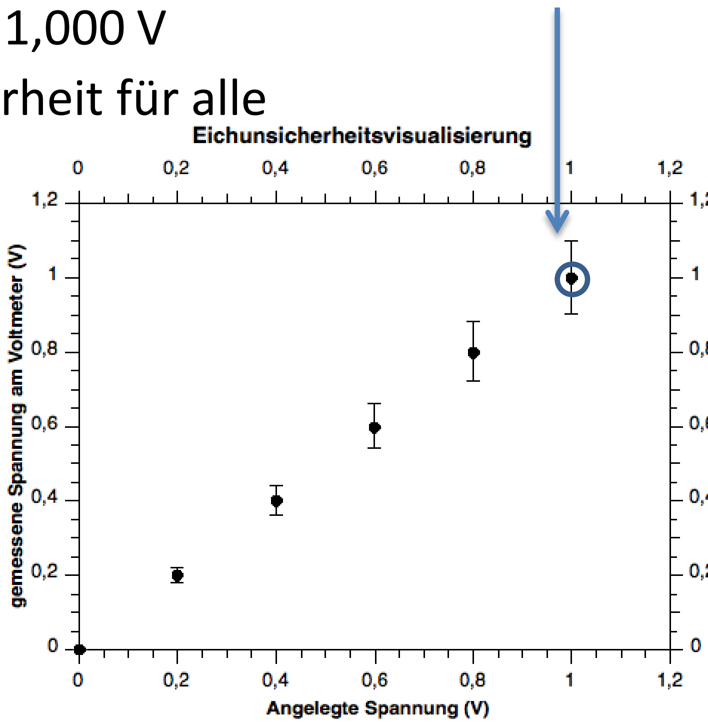
Typ-B-Messunsicherheiten

- Allen Messungen liegen Unsicherheiten zugrunde
- Auch einzelne Messwerte haben Unsicherheiten, diese sind durch Messmethoden und Messgerät bedingt.
  ≠ systematischer Fehler im klassischen Sinn, da Richtung unbekannt
- **Ein Beispiel:** Spannungsmessung mit dem Digitalvoltmeter
  – Eichunsicherheit
  – Linearitätsunsicherheit
  – Digitalisierungsunsicherheit
  – Sonstige mögliche richtungsunbekannte Unsicherheiten (Temperaturbedingte Drift, Hystereseeffekte, Ansprechempfindlichkeit,…)

Typ-B-Messunsicherheiten: a) Eichunsicherheit

Angabe darüber, wie genau das Gerät an internationale Standards angeschlossen wurde.

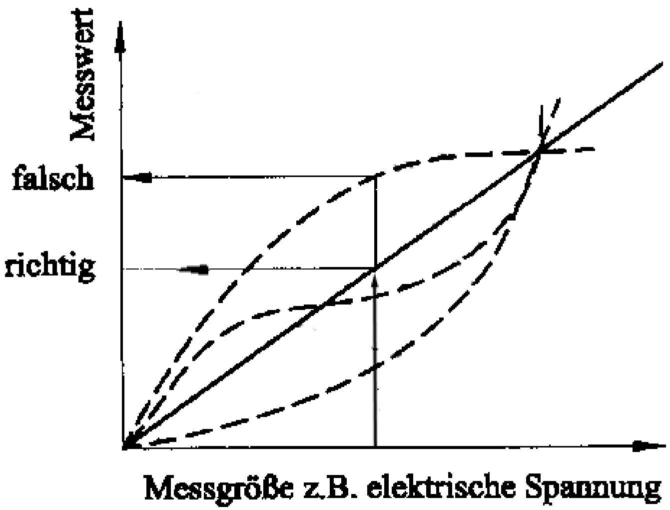
- Kalibration von Messgeräten (Vergleich mit Eichstandard) erfolgt üblicherweise am Skalenende:
  z.B.: Bereich 0,000 V - 1,000 V: Eichung bei 1,000 V
- Werden in % angegeben (=relative Unsicherheit für alle dazwischenliegenden Messwerte).
  Z.B.: 1% U1 = (0,100 ± 0,001)V;
  U2 = (0,900 ± 0,009)V
- Werden für ein Endergebnis mehrere Spannungsmessungen mit ein und demselben Gerät benötigt,
  so sind die **Unsicherheiten korreliert!**



Typ-B-Messunsicherheiten: b) Linearitätsunsicherheit

Angabe darüber, wie genau Eichung auf andere dazwischenliegende Messwerte übertragen werden kann.

- Üblicherweise in % des Skalenendwertes (also eine absolute Unsicherheit)
- Linearitätsunsicherheiten können für jeden Messwert anders sein, daher sind sie unkorreliert.

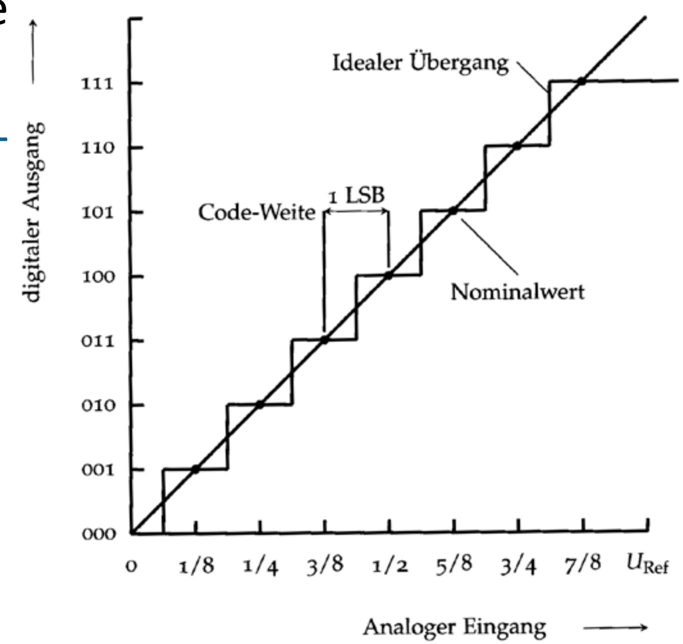


Linearitätsabweichung

Typ-B-Messunsicherheiten: c) Digitalisierungsunsicherheit

Unvermeidbar wegen der Auflösung der Messskala

- Es sind nur endlich viele Unterteilungen der Messskala zur Darstellung des Messwertes vorhanden.
- Die Ablesung (A/D-Wandlung) kann niemals genauer sein als ± 0,5 Einheiten der letzten verwendeten Stelle se Der Bereich von -0,5 bis + 0,5 = 1 Einheit der letzten verwendeten Stelle wird Skalen- od. Digitalisierungsunsicherheit (engl. LSB = last significant bit) genannt
- Gilt im Prinzip auch für analoge Skalen
- Ist dem Wesen nach eine Rundungs-unsicherheit



Typ-B-Messunsicherheiten veranschaulichen

Längenmessgerät an der Tafel bauen

- Eichnormal = Tafel-Geodreieck.
  Eichunsicherheit ist so groß wie Unsicherheit des Eichnormals und Dicke des Kreidenstriches.
- Linearitätsunsicherheit bei jedem Teilungsstrich mit Streckensymmetrale.
- Digitalisierungsunsicherheit bei der ersten Messung einer Länge, die nicht exakt auf einem Teilungsstrich liegt.

Typ-A-Messunsicherheiten: Übungsaufgaben

Schüler/innen-Experiment „Prüfung der Typ-B-Unsicherheiten“

- Pro 2er-Gruppe ein Holz-oder Plastiklineal gleichen Typs (30cm od. länger).
- Prüfung Eichunsicherheit: bei 15,0 cm mit der Schiebelehre. Angabe der Abweichung des Lineals vom „Eichmaßatab= Schiebelehre“
- Prüfung der Linearität: Anfertigen eines Kontroll-Normals (2,00 oder 3,00 cm Länge, auch aus Papier möglich) mit Hilfe der Schiebelehre. Prüfung des Abstandes der cm-Unterteilungen am Lineal an verschiedenen Stellen. Abweichung mit Handy fotografieren (ist schwer messbar, Größenordnung aber abschätzbar)

Typ-B-Messunsicherheiten

- In Summe führen alle (3) Kategorien der Typ-B-Messunsicherheit zu einer gemeinsamen zufälligen Messunsicherheit (sie ist an jedem Punkt der Skala leicht unterschiedlich).
- Daher legt man auch ihr eine Modellverteilung zugrunde (Gauß-, Dreieck-, Rechteck-, Trapezverteilung etc.)
- Das ist der Grund, warum man Typ-A- und Typ-B-Messunsicherheiten mit einander zu zusammengesetzten Unsicherheiten verrechnen kann.
  - Die quadratische Addition von 2 normalverteilten Größen ergibt wieder eine normalverteilte Größe → Faltung: http://www.jhu.edu/~signals/convolve/index.html

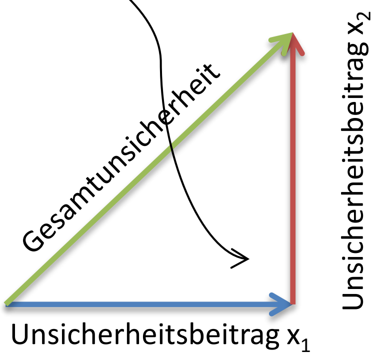
  → Durch die Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes wird der prinzipielle Charakter der Verteilung der Unsicherheiten erhalten

Zusammengesetzte Messunsicherheiten Das Fehlerfortpflanzungsgesetz von Gauß

Es sei f eine Funktion von k unabhängigen Messgrößen x_i mit zufälligen Messunsicherheiten Δx_i

So ist die Messunsicherheit von $f(x_i)$ gleich Δf nach:

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \Delta x_i^2}$$



Für k=2 sieht das Gesetz so aus:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \cdot \Delta x_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \cdot \Delta x_2^2}$$

→ „geometrische“ oder „quadratische“ Addition der Unsicherheitskomponenten

Zusammengesetzte Messunsicherheiten: „Abschätzung der größten Unsicherheit“

$$A = a \cdot b \qquad a = (a \pm \Delta a) \qquad b = (b \pm \Delta b)$$

$$\Delta A_{max} = \frac{(a + \Delta a)\cdot(b + \Delta b) - (a - \Delta a)\cdot(b - \Delta b)}{2}$$

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

Eines ist sicher:

Es gibt immer eine (Mess-)Unsicherheit!

Empfohlene Literatur

[1] Drosg, M. 2006. Der Umgang mit Unsicherheiten. Ein Leitfaden zur Fehleranalyse. Wien: Facultas Universitätsverlag

[2] Markowitsch, W., Nagel, C. 2011. Leitfaden für Studierende des Anfängerpraktikums. www.univie.ac.at/anfpra

[3] ISO/IEC Guide 98-3:2008: Uncertainty of measurement – Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement. ISO, Genf 2008, ISBN 92-67-10188-9.

[4] Kirkup, L. & Frenkel, B. 2006. An Introduction to Uncertainty in Measurement. Cambridge: Cambridge University Press

[5] Pesch, B. 2003. Bestimmung der Messunsicherheit nach GUM. Eigenverlag.

[6] Bantel, M. 2000. Grundlagen der Messtechnik. München/Wien: Fachbuchverlag Leipzig

[7] Gränicher, H. 1994. Messung beendet – was nun? Zürich: VDF

Was tun bei Angaben ohne Unsicherheit?

Z.B. Angaben bei Übungsaufgaben $l = 0{,}42$ m

→Implizite Unsicherheitsangabe über signifikante Stellen bzw. „die signifikante Stelle“

$l = 0{,}42$ m heißt: $0{,}415 < l < 0{,}425$

Δl ist also zumindest $\pm\, 0{,}005$ (und maximal $\pm\, 0{,}01$)

DIE (letzte) signifikante Stelle ist jene Stelle, deren Wert sich um mindestens eine Skalierungseinheit ändert, wenn der (einfache) Betrag der Unsicherheit addiert oder subtrahiert wird.

Oder anders formuliert:

Alle Stellen des Ergebnis größer/gleich der o. def. Stelle sind signifikant und müssen angegeben werden!
(alle anderen nicht!)

Messwert	Wahrer Wert im Intervall	Anzahl der Signifikanten Stellen
2,4	2,35 – 2,45	2
2,40		
2,42		
6000		
6×10^3		

- Das Ergebnis einer **Addition/Subtraktion** bekommt genauso viele Nachkommastellen wie die Zahl mit den wenigsten Nachkommastellen.
- Das Ergebnis einer **Multiplikation/Division** bekommt genauso viele signifikante Stellen wie die Zahl mit den wenigsten signifikanten Stellen:

- 1,58 . 0,03 =
- 1,4 + 2,53 =
- 2,456 – 2,453 =
- 1,213 42 – 1,040 =
- 7×10^{-2} / 523 =

- 20,567 + 0,0007 =
- 10 + 1,2345 =

- 20,000 km – 158,3 m =
- 40 km – 600 m =
- 100 m – 12 kg =
- 75kg x 1,2 ms^{-2} =
- $2 \times 8^2 \times \pi$ =
- 250 km / 3,00 h =